**Proposizio Logika - Hizkuntz Formala**

Logikaren sekretu zikina: ez dago dena baliozkotu, azalduko duen sistema logiko bakar bat.

**LEXIKOA**

Garrantzitsua guztiz zehatza izatea. Hizkuntza naturalak anbiguoak dira.

1-ALDAGAI PREPOSIZIONALAK: p, q, r, s… Esanahi ez relebantea.

-Proposizioak formalizatzeko erabiltzen ditugun zeinuak.

-Perpaus deklaratiboaren esanahia, edukia

-Egiaztatu edo faltsutu daitezkeen perpausak.

-PROPOSIZIO ATOMIKOAK deritze.

-Konbinatzean, PROPOSIZIO MOLEKULARRAK

2-KONEKTAGAILUAK: Konstante logikoak.

-Monadikoak:

-ㄱ Ukazioa. Adib: ㄱp (ez p)

-Diadikoak:

-∧ Konjuntzioa. Adib p∧q (p eta q)

-∨ Disjuntzioa. Adib p∨q (p edo q)

-→Baldintza. Adib p→q (baldin p orduan q)

-↔️Bibaldintza. Adib p↔️q (baldin eta bakarrik baldin p orduan q)

+

- | Schaeper. Adib: p | q. Konjuntzioaren ukazioa. (Bateraezina)

- ↓Pierce . Adib. p↓q. Disjuntzioaren ukazioa (Ez p ez q)

3-ADIERAZPEN AUXILIARRAK, PARENTESIAK: [, (, ), ]

-Anbiguotasunak baztertzeko

-Noiz ez erabili.

-Segidan konjuntzioak bakarrik edo disjuntzioak bakarrik

-Anbiguotasunik ez dagoenean.

**SINTAXIA**

1-Proposizio Atomikoak AOF dira.

2- α AOF bada, ㄱα AOF da.

3- α eta β AOF badira,

α ∧ β

α ∨ β

α → β

α ↔️ β ere AOF dira.

4-1, 2, 3 arauak kantitate finitu batean aplikatzean AOF da, eta ez dago beste legerik.

\*Argitzeko:

-Formulak/Adierazpen Ongi Formulatuak/AOF

-α eta β META ALDAGAIAk dira:

-Aldagaiaren aldagaia. Aldagaiei buruz hitz egiteko aldagaiak.

-Atomikoak edota Molekularrak.

**Formulak, azpi Formulak.**

-Azpi formula: Bere horretan AOF den eta AOF baten osagai den adierazpena.

-AOF vatek beti izango ditu azpi formulak.

-Proposizio atomikoek ere (beraien burua)

-Formula osatzean pauso batzuk ematen dira: ORDENA RELEBANTEA DA.

-Parentesien bidez ordena aldatu.

-Zuhaitz genealogikoen bidez ebatzi.

-Garrantzitsua jakitea KONEKTATZAILE NAGUSIA zein den. Egitura ulertzea.

-Formulek beraien KONEKTATZAILE NAGUSIAren izena hartu.

-Zatiek…

-Konjuntzioan: konjuntoak

-Disjuntzioan: disjuntoak

-Baldintzetan: aurrekariak eta atzekariak.

**SEMANTIKA** esanahiaren teoria

-Formulek balioa, egia balioa: EGIAZKOA (1) / FALTSUA (0)

-Bi baliotasun printzipioa:

-Formula oro 1 edo 0

-Formulak oro Egia Balioa

-Ez dago hirugarren EBrik

-Formulek ezin bi EB eduki.

(+Hizkuntza naturaletan betetzen da? Ez… anbiguoagoa).

-Interpretazioak esleipenen bitartez burutzen dira:

-Proposizio atomiko bakoitzari balio bat ematen zaio.

-Zenbat lerro egongo diren jakiteko: 2^n

-Egia funtzioak. Objetu mota batzuk lotzen dituzten operazioak.

-Argudioak

-Balioak.

-Monadikoak. Proposizioarena hartu, kontrakoa eman.

|  |  |
| --- | --- |
| p | ㄱp |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

º-Diadikoak

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | **∧** | q |  | p | **∨** | q |  | p | **→** | q |  | p | **↔️** | q |
| 1 | **1** | 1 | 1 | **1** | 1 | 1 | **1** | 1 | 1 | **1** | 1 |
| 1 | **0** | 0 | 1 | **1** | 0 | 1 | **0** | 0 | 1 | **0** | 0 |
| 0 | **0** | 1 | 0 | **1** | 1 | 0 | **1** | 1 | 0 | **0** | 1 |
| 0 | **0** | 0 | 0 | **0** | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | **0** | 0 |

+

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | **|** | q |  | p | **↓** | q |
| 1 | **0** | 1 | 1 | **0** | 1 |
| 1 | **1** | 0 | 1 | **0** | 0 |
| 0 | **1** | 1 | 0 | **0** | 1 |
| 0 | **1** | 0 | 0 | **1** | 0 |

**ZENBAIT MOBIDA**

**Hizkuntza natural/formal.**

-Ez dago 1:1 korrespondentziariki: Formalizazioa ez da mekanikoa

-Interptretatu behar.

-Adib.

|  |  |
| --- | --- |
| Hizkuntza formala | Hizkuntza Naturala |
| ∧ | “eta”, “baina”, “,”, “-ean”... |
| **→** | “baldin(...)orduan(...)”, “eta”, “-ean”... |

**Baldintza materiala (→)**

p**→**q egia izan daiteke baina errepresentatzen duten proposizioa intuitiboki ez.

Zergatik?

-Ez da besterik gabe mundu errealean p**→**q egia izan daitekela.

-Estenatoki kontrafaktiko asko daude.

-Horregatik iruditzen zaigu intuitiboki faltsua dela.

-Hizkuntza naturaleko baldintzetan ESANAHIAk soilik lotzen ditugu.

-Baldintza materialak ez du hori jasotzen, egia funtzio bat da.

-Logikan EGIA BALIOAK lotzen ditugu, lotura ANALITIKOA.

**“Edo” esklusiboa formalizatzen…**

-Aukera desberdinak:

-(p ∨ q) ∧ ㄱ (p ∧ q)

-(p ∨ q) ∧ (p ↔️ ㄱ q)

-ㄱ (p ↔️ q)

-(p → ㄱ q) ∧ (ㄱ p → q)

**Formulen egia taulen araberako izaera:**

-Tautologia: esleipen guztietan egiazkoa. ⊨

-Kontraesana: esleipen guztietan gezurrezkoa. ⊥

-Kontingentea: egia edo gezurra esleipenen arabera.

**Tautologiak/kontraesanak harremantzean azkar kalkulatzeko**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| ⊨ ɑ | |  | ⊥ɑ | |
| formul | E.B. | formul | E.B. |
| α ∧ β | ≡β | α ∧ β | ⊥ |
| α ∨ β | ⊨ | α ∨ β | ≡β |
| α → β | ≡β | α → β | ⊨ |
| α ↔️ β | ≡β | α ↔️ β | ≡β |
| β→ɑ | ⊨ | β→ɑ | ≡β |

**Asegarritasuna**

-Esleipen batek formula bat asetzen du bere balioa 1 denean.

-Formula bat asegarria da gutxienez esleipen baten bidez balioa 1 bada.

-Formula multzo bat asegarria da gutxienez esleipen batek formula guztiak asetzen baditu.

**BALIOZKOTASUNA**

-Semantikoki: premisak egiazkoak badira ezinezkoa faltsua izatea.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| premisa  α | inferentzia  ⊨ | ondorioa  β |

-Noiz baliozkoa?

-Ez dagoenean α asetzen eta β asetzen ez duen esleipenik

-α asetzen duten guztiek β asetzen dutenean.

-Ez konfunditu baldintza materialarekin.

1- p→q egia izan daiteke. Esleipenen arabera egia da.

2- p⊨ qfaltsua da. Ezin esan esleipenen arabera egiazkoa den.

-Proposizio atomikoak izanik badago faltsu bihurtzen duenik.

**1** (baldintza) **tautologikoa bada 2** (inferentzia) **baliozkoa da.**

-Baliozkotasuna kalkulatzeko balio digun araua

**Ondorioztatze logikoaren izaera…**

-Erreflexiboa: b.b.b. objektu orok bere buruarekin badauka erlazioa

-Asimetrikoa: ez da inoiz simetrikoa

\*Simetrikoa: b.b.b a objektuak b objektuarekin harremana b-k a-rekiko duenaren berdina izatea.

-Iragankorra: adib

α⊨β, β⊨ᵞ, α⊨ᵞ

**Baliokidetza**

Baliokideak diren bi formulek ESANAHI LOGIKO berbera dute.

Noiz baliokideak? Bi formulen arteko bibaldintza tautologikoa denean. (egia taulak ikusi ahal)

**Ordezkatze Printzipioa**

α β-ren azpiformula bada, β´βn α α´-rekin ordezkatuta lortzen den formula bada, eta α≡α´bada, orduan β≡β´.

**Teoria**

- α≡β ↔️ ㄱα≡ㄱβ

- Baliokidetza formulen arteko erlazioa da.

-ERREFLEXIBOA. α≡α

-SIMETRIKOA. α≡β ↔️β≡α

-IRAGANKORRA: α≡β; β≡γ ⇒ α≡γ

- **α≡β bbb α⊨β eta β⊨α** Frogatzeko:

-Demagun α≡β edozein b. esleipenetan. *b(α)=b(β)*

-Demagun ez dela ematen α⊨β eta β⊨α

-Suposa dezagun α⊭β. Beraz badago gutxienez b. esleipen bat:

b(α)=1 eta b(β)=0

-Baina orduan badago b. esleipen bat b(α)≠b(β). *KONTRAESANA*.

-Suposa dezagun β⊭α…

-ABSURDORAKO ERREDUKZIOZ: **α≡β bbb α⊨β eta β⊨α**

- **α⊨β eta β⊨α ⇒ α≡β.** Frogatzeko

-Demagun α⊨β. *Ez dago* b. b(α)=1 eta b(β)=0

-Demagun β⊨α *Ez dago* b(β)=1 eta b(α)= 0

-Demagun α≢β beraz *badago* gutxienez b.

b(α)=1 eta b(β)=0

b(α)= 0 eta b(β)=1

*KONTRAESANA*

-Beraz, **α⊨β eta β⊨α ⇒ α≡β**

**Oinarrizko baliokidetzak**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Ukazio Bikoitza**  ㄱㄱα=α | **Idenpotentzia**  α∧α≡α  α∨α≡α | **Konmutagarritasuna**  α∧β≡β∧α  α∨β≡β∨α |
| **Transposizioa**  α**→**β≡ㄱβ**→**ㄱα | **Asoziagarritasuna**  α∧(β∧γ)≡(α∧β)∧γ  α∨(β∨γ)≡(α∨β)∨γ | **Esportazioa**  α**→**(β**→**γ)≡(α∧β)**→**γ |
| **De Morgan**  α∧β≡ ㄱ(ㄱα∨ㄱβ)  α∨β≡ㄱ(ㄱα∧ㄱ β) | **Distribuzioa**  α∧(β∨γ)≡ (α∧β)∨(α∧γ)  α∨(β∧γ)≡ (α∨β)∧(α∨γ) |  |

**Forma Normalak**

Definizioa. Formula guztietan biak atera ahal.

Disjuntzioak. Disjuntoak dira: -proposizio atomikoak

-proposizio atomikoen ukazioak

-Konjuntzio bat: proposizio atomikoz/ukazioz osatua

Konjuntzioak. Konjuntoak dira: -proposizio atomikoak

-proposizio atomikoen ukazioak.

-disjuntzio bat: proposizio atomikoz/ukazioz osatua

**Zuhaitz semantikoak**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **ARAUAK** | | | |
| **∧1** | | **∧0** | |
| a  b | | ㄱa | ㄱb |
| **∨1** | | **∨0** | |
| a | b | ㄱa  ㄱb | |
| **→1** | | **→0** | |
| ㄱa | b | a  ㄱb | |
| **↔️1** | | **↔️0** | |
| a→b  b→a | | ㄱ(a→b) | ㄱ(b→a) |

**Tautologien ordezkapen legea.**

a formula tautologikoa bada, orduan an proposizio atomiko batek dauzkan agerpen guztiak beste edozein formularekin ordezkatzen baditugu, lortzen dugun a` formula ere Tautologikoa izango da.

**Teoremak eta meta teoremak**

Egia logikoak:

-Logikaren legearen arabera egiazkoak

-Tautologiak

Teoremak: Sistema logiko batean egiazkoa dela frogatuta dagoena.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Hirugarren baztertua  a **∨** ㄱa | Dedukzio teorema  a⊨b ⇒ ⊨ (a→b) | Modus Tollens  a→b; ㄱb⊨ㄱa |
| Kontraesan eza  ㄱ(a **∧**  ㄱa) | DT. Kontraposizioa  ⊨ (a→b)⇒a⊨b | Tatologiatik edozer  ⊨a ⇒ ℾ⊨a |
| Identitatea  a→a | Monotonia  ℾ⊨a ⇒ℾ**∨ edozer** ⊨ | Kontraesanetik edozer  ⊥a ⇒ a⊨b |
| Baldintzaren legeak  a→(b→a) a→(ㄱa→b) | | Modus Ponens  a→b; a⊨b |

**Sintaxia**

**Sistema axiomatikoak**

Corpus deduktiboa:

-Axiomak: frogatu gabe onartzen diren formulak

-Transformazio arauak: sistema osatzen duten formulak nola konbinatu eta transfotmatu esaten duten arauak

-Definizioak: zeinu batzuk erabiltzen dituzten formulak nola berridatzi beste zeinu batzuekin

Teoremak: sistemak frogatu duen formula bat.

**PM SISTEMA (FITXA)**

**DEDUKZIO NATURALA-GENTZEN**

-Corpus deduktiboa

-Arau primitiboak: 8

-Arau deribatuak: infinito, nano

… (FITXA)

**LOGIKA EZ KLASIKOAK**

Orain arte…Klasikoek

-Bi baliotasuna

-Extensionaltasuna (hizkuntza naturalak ez bezala)

-Operatzaileek formulen hedadudari bakarrik eragin

-Osagai atomikoen hedadura: formula osoaren balioa finkatuta

-Logika hedatuak:

Klasikoko baliozkotasuna onartu, berriak gehitu

-Logika diberjenteak:

Klasikoko baliozkotasun batzuk ukatu

-Bi baliotasunaren aurka: etorkizuna, fikzioa…?

-Propietate lausoak?

-Logika Balioaniztunak

-finito/infinito

-Logika Modalak

-Operatzaile logikoak extensionalak

-Formula baten balioa bera osatzen duten p atomikoen hedadudaren, egia balioaren, arabera

-Behin atomikoen esleipena jakinda, formularen balioa badakigu.

**Testuinguru intensionalak**

1. T Modalak: “beharrezko”, “kontingente”, “posible”...

Perpausen egia balioa ez da nahikoa proposizio osoaren egia balioa jakiteko.

2. T Epistemikoak: “uste”:.

Ez digu ezer esaten, ez du zerikusirik. Intensionala. Ez extensionala.

Ondorioa: Logika klasikoa (extensionala) ez da nahikoa testuinguru intensionalak formalizatzeko

+Logika klasikoak ez du balio baliozkotasuna aztertzen.

Logika Modalak:

**-C.I. Lewis**. XX mende hasiera.

-Baldintza materialen zalantza: beste baldintza bat behar

-Paradoxak.

-PMko hiztegia, axiomak

-Bi operatzaile berri.

☐Beharrezko

♢Posible

Definizioak

☐a: egiazkoa da w1-en, bbb w1ek sarbidea duen w guztietan b(a)=1

♢a: egiazkoa da w1en, bbb w1ek sarbidea duen w batean gutxienez b(a)=1

**METALOGIKA**

-Sistema logikoek dauzkate ezaugarri metalogikoak

-logikak izaera erreflexiboaµ

-Sistema guztiek betetzea nahi dugun ezaugarriak…

|  |  |
| --- | --- |
| Zuzentasuna  -Zuzena da bbb frogatu daitekeen formula oro egia logikoa bada  -⊢a ⊨ ⇒ ⊨a  -bbb baliozkotasun semantikoa  -bbb BEHARREZKOA den baliozkotasun sintaktikorako | Osotasuna  Osoa da bbb posible bada edozein egia logiko deribatzea  -⊨a ⇒ ⊢a |

“sistema tontoa” osoa bai, zuzena ez

Guk klasean emandakoa osoa eta zuzena

-Beste ezaugarri batzuk:

-Konsistentzia: zuzentasuna bezala baina ahulago

-Konsistentea da bbb ezin badira ⊢a eta ⊢ㄱa

-Erabakigarritasuna

-bbb badago metodo MEKANIKO bat edozein arentzat baliozkoa dela erabakitzen duena

-Absurdoa, egia taulak…

-Axiomen independentzia.

-Ezaugarri hauek soilik kanpotik aurkitu daitezke. Hori da metalogikaren funtzioa