**Proposizio Logika - Hizkuntz Formala**

Logikaren sekretu zikina: ez dago dena baliozkotu, azalduko duen sistema logiko bakar bat.

**LEXIKOA**

Garrantzitsua guztiz zehatza izatea. Hizkuntza naturalak anbiguoak dira.

1-ALDAGAI PREPOSIZIONALAK: p, q, r, s… Esanahi ez relebantea.

 -Proposizioak formalizatzeko erabiltzen ditugun zeinuak.

 -Perpaus deklaratiboaren esanahia, edukia

 -Egiaztatu edo faltsutu daitezkeen perpausak.

 -PROPOSIZIO ATOMIKOAK deritze.

 -Konbinatzean, PROPOSIZIO MOLEKULARRAK

 2-KONEKTAGAILUAK: Konstante logikoak.

 -Monadikoak:

-ㄱ Ukazioa. Adib: ㄱp (ez p)

 -Diadikoak:

 -∧ Konjuntzioa. Adib p∧q (p eta q)

 -∨ Disjuntzioa. Adib p∨q (p edo q)

 -→Baldintza. Adib p→q (baldin p orduan q)

 -↔️Bibaldintza. Adib p↔️q (baldin eta bakarrik baldin p orduan q)

 +

 - | Schaeper. Adib: p | q. Konjuntzioaren ukazioa. (Bateraezina)

 - ↓Pierce . Adib. p↓q. Disjuntzioaren ukazioa (Ez p ez q)

 3-ADIERAZPEN AUXILIARRAK, PARENTESIAK: [, (, ), ]

 -Anbiguotasunak baztertzeko

 -Noiz ez erabili.

 -Segidan konjuntzioak bakarrik edo disjuntzioak bakarrik

 -Anbiguotasunik ez dagoenean.

**SINTAXIA**

1-Proposizio Atomikoak AOF dira.

 2- α AOF bada, ㄱα AOF da.

 3- α eta β AOF badira,

 α ∧ β

 α ∨ β

 α → β

 α ↔️ β ere AOF dira.

 4-1, 2, 3 arauak kantitate finitu batean aplikatzean AOF da, eta ez dago beste legerik.

\*Argitzeko:

-Formulak/Adierazpen Ongi Formulatuak/AOF

-α eta β META ALDAGAIAk dira:

 -Aldagaiaren aldagaia. Aldagaiei buruz hitz egiteko aldagaiak.

 -Atomikoak edota Molekularrak.

**Formulak, azpi Formulak.**

-Azpi formula: Bere horretan AOF den eta AOF baten osagai den adierazpena.

 -AOF vatek beti izango ditu azpi formulak.

 -Proposizio atomikoek ere (beraien burua)

 -Formula osatzean pauso batzuk ematen dira: ORDENA RELEBANTEA DA.

 -Parentesien bidez ordena aldatu.

 -Zuhaitz genealogikoen bidez ebatzi.

 -Garrantzitsua jakitea KONEKTATZAILE NAGUSIA zein den. Egitura ulertzea.

 -Formulek beraien KONEKTATZAILE NAGUSIAren izena hartu.

 -Zatiek…

 -Konjuntzioan: konjuntoak

 -Disjuntzioan: disjuntoak

 -Baldintzetan: aurrekariak eta atzekariak.

**SEMANTIKA** esanahiaren teoria

-Formulek balioa, egia balioa: EGIAZKOA (1) / FALTSUA (0)

-Bi baliotasun printzipioa:

 -Formula oro 1 edo 0

 -Formulak oro Egia Balioa

 -Ez dago hirugarren EBrik

 -Formulek ezin bi EB eduki.

 (+Hizkuntza naturaletan betetzen da? Ez… anbiguoagoa).

-Interpretazioak esleipenen bitartez burutzen dira:

 -Proposizio atomiko bakoitzari balio bat ematen zaio.

 -Zenbat lerro egongo diren jakiteko: 2^n

-Egia funtzioak. Objetu mota batzuk lotzen dituzten operazioak.

 -Argudioak

 -Balioak.

 -Monadikoak. Proposizioarena hartu, kontrakoa eman.

|  |  |
| --- | --- |
| p | ㄱp |
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

º-Diadikoak

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | **∧** | q |  | p | **∨** | q |  | p | **→** | q |  | p | **↔️** | q |
| 1 | **1** | 1 | 1 | **1** | 1 | 1 | **1** | 1 | 1 | **1** | 1 |
| 1 | **0** | 0 | 1 | **1** | 0 | 1 | **0** | 0 | 1 | **0** | 0 |
| 0 | **0** | 1 | 0 | **1** | 1 | 0 | **1** | 1 | 0 | **0** | 1 |
| 0 | **0** | 0 | 0 | **0** | 0 | 0 | **1** | 0 | 0 | **0** | 0 |

+

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| p | **|**  | q |  | p | **↓** | q |
| 1 | **0** | 1 | 1 | **0** | 1 |
| 1 | **1** | 0 | 1 | **0** | 0 |
| 0 | **1** | 1 | 0 | **0** | 1 |
| 0 | **1** | 0 | 0 | **1** | 0 |

**ZENBAIT MOBIDA**

**Hizkuntza natural/formal.**

-Ez dago 1:1 korrespondentziariki: Formalizazioa ez da mekanikoa

 -Interptretatu behar.

 -Adib.

|  |  |
| --- | --- |
| Hizkuntza formala | Hizkuntza Naturala |
| ∧ | “eta”, “baina”, “,”, “-ean”... |
| **→** | “baldin(...)orduan(...)”, “eta”, “-ean”... |

**Baldintza materiala (→)**

p**→**q egia izan daiteke baina errepresentatzen duten proposizioa intuitiboki ez.

Zergatik?

 -Ez da besterik gabe mundu errealean p**→**q egia izan daitekela.

 -Estenatoki kontrafaktiko asko daude.

 -Horregatik iruditzen zaigu intuitiboki faltsua dela.

 -Hizkuntza naturaleko baldintzetan ESANAHIAk soilik lotzen ditugu.

 -Baldintza materialak ez du hori jasotzen, egia funtzio bat da.

-Logikan EGIA BALIOAK lotzen ditugu, lotura ANALITIKOA.

**“Edo” esklusiboa formalizatzen…**

-Aukera desberdinak:

 -(p ∨ q) ∧ ㄱ (p ∧ q)

 -(p ∨ q) ∧ (p ↔️ ㄱ q)

 -ㄱ (p ↔️ q)

 -(p → ㄱ q) ∧ (ㄱ p → q)

**Formulen egia taulen araberako izaera:**

-Tautologia: esleipen guztietan egiazkoa. ⊨

-Kontraesana: esleipen guztietan gezurrezkoa. ⊥

-Kontingentea: egia edo gezurra esleipenen arabera.

**Tautologiak/kontraesanak harremantzean azkar kalkulatzeko**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ⊨ ɑ |  | ⊥ɑ |
| formul | E.B. | formul | E.B. |
| α ∧ β | ≡β | α ∧ β | ⊥ |
| α ∨ β | ⊨ | α ∨ β | ≡β |
| α → β | ≡β | α → β | ⊨ |
| α ↔️ β | ≡β | α ↔️ β | ≡β |
| β→ɑ | ⊨ | β→ɑ | ≡β |

**Asegarritasuna**

-Esleipen batek formula bat asetzen du bere balioa 1 denean.

-Formula bat asegarria da gutxienez esleipen baten bidez balioa 1 bada.

-Formula multzo bat asegarria da gutxienez esleipen batek formula guztiak asetzen baditu.

**BALIOZKOTASUNA**

-Semantikoki: premisak egiazkoak badira ezinezkoa faltsua izatea.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| premisa α | inferentzia⊨ | ondorioaβ |

 -Noiz baliozkoa?

-Ez dagoenean α asetzen eta β asetzen ez duen esleipenik

-α asetzen duten guztiek β asetzen dutenean.

-Ez konfunditu baldintza materialarekin.

1- p→q egia izan daiteke. Esleipenen arabera egia da.

2- p⊨ qfaltsua da. Ezin esan esleipenen arabera egiazkoa den.

 -Proposizio atomikoak izanik badago faltsu bihurtzen duenik.

**1** (baldintza) **tautologikoa bada 2** (inferentzia) **baliozkoa da.**

-Baliozkotasuna kalkulatzeko balio digun araua

**Ondorioztatze logikoaren izaera…**

-Erreflexiboa: b.b.b. objektu orok bere buruarekin badauka erlazioa

-Asimetrikoa: ez da inoiz simetrikoa

\*Simetrikoa: b.b.b a objektuak b objektuarekin harremana b-k a-rekiko duenaren berdina izatea.

-Iragankorra: adib

α⊨β, β⊨ᵞ, α⊨ᵞ

**Baliokidetza**

Baliokideak diren bi formulek ESANAHI LOGIKO berbera dute.

Noiz baliokideak? Bi formulen arteko bibaldintza tautologikoa denean. (egia taulak ikusi ahal)

**Ordezkatze Printzipioa**

α β-ren azpiformula bada, β´βn α α´-rekin ordezkatuta lortzen den formula bada, eta α≡α´bada, orduan β≡β´.

**Teoria**

- α≡β ↔️ ㄱα≡ㄱβ

- Baliokidetza formulen arteko erlazioa da.

 -ERREFLEXIBOA. α≡α

 -SIMETRIKOA. α≡β ↔️β≡α

-IRAGANKORRA: α≡β; β≡γ ⇒ α≡γ

- **α≡β bbb α⊨β eta β⊨α** Frogatzeko:

 -Demagun α≡β edozein b. esleipenetan. *b(α)=b(β)*

 -Demagun ez dela ematen α⊨β eta β⊨α

 -Suposa dezagun α⊭β. Beraz badago gutxienez b. esleipen bat:

 b(α)=1 eta b(β)=0

 -Baina orduan badago b. esleipen bat b(α)≠b(β). *KONTRAESANA*.

 -Suposa dezagun β⊭α…

 -ABSURDORAKO ERREDUKZIOZ: **α≡β bbb α⊨β eta β⊨α**

- **α⊨β eta β⊨α ⇒ α≡β.** Frogatzeko

-Demagun α⊨β. *Ez dago* b. b(α)=1 eta b(β)=0

-Demagun β⊨α *Ez dago* b(β)=1 eta b(α)= 0

 -Demagun α≢β beraz *badago* gutxienez b.

 b(α)=1 eta b(β)=0

 b(α)= 0 eta b(β)=1

 *KONTRAESANA*

 -Beraz, **α⊨β eta β⊨α ⇒ α≡β**

**Oinarrizko baliokidetzak**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Ukazio Bikoitza**ㄱㄱα=α | **Idenpotentzia**α∧α≡αα∨α≡α | **Konmutagarritasuna**α∧β≡β∧αα∨β≡β∨α |
| **Transposizioa**α**→**β≡ㄱβ**→**ㄱα | **Asoziagarritasuna**α∧(β∧γ)≡(α∧β)∧γα∨(β∨γ)≡(α∨β)∨γ | **Esportazioa**α**→**(β**→**γ)≡(α∧β)**→**γ |
| **De Morgan**α∧β≡ ㄱ(ㄱα∨ㄱβ)α∨β≡ㄱ(ㄱα∧ㄱ β) | **Distribuzioa**α∧(β∨γ)≡ (α∧β)∨(α∧γ)α∨(β∧γ)≡ (α∨β)∧(α∨γ) |  |

**Forma Normalak**

Definizioa. Formula guztietan biak atera ahal.

 Disjuntzioak. Disjuntoak dira: -proposizio atomikoak

 -proposizio atomikoen ukazioak

 -Konjuntzio bat: proposizio atomikoz/ukazioz osatua

 Konjuntzioak. Konjuntoak dira: -proposizio atomikoak

 -proposizio atomikoen ukazioak.

 -disjuntzio bat: proposizio atomikoz/ukazioz osatua

**Zuhaitz semantikoak**

|  |
| --- |
| **ARAUAK** |
| **∧1** | **∧0** |
| ab | ㄱa | ㄱb |
| **∨1** | **∨0** |
| a | b | ㄱaㄱb |
| **→1** | **→0** |
| ㄱa | b | aㄱb |
| **↔️1** | **↔️0** |
| a→bb→a | ㄱ(a→b) | ㄱ(b→a) |

**Tautologien ordezkapen legea.**

a formula tautologikoa bada, orduan an proposizio atomiko batek dauzkan agerpen guztiak beste edozein formularekin ordezkatzen baditugu, lortzen dugun a` formula ere Tautologikoa izango da.

**Teoremak eta meta teoremak**

Egia logikoak:

 -Logikaren legearen arabera egiazkoak

 -Tautologiak

Teoremak: Sistema logiko batean egiazkoa dela frogatuta dagoena.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Hirugarren baztertuaa **∨** ㄱa | Dedukzio teoremaa⊨b ⇒ ⊨ (a→b) | Modus Tollensa→b; ㄱb⊨ㄱa |
| Kontraesan ezaㄱ(a **∧**  ㄱa) | DT. Kontraposizioa⊨ (a→b)⇒a⊨b | Tatologiatik edozer⊨a ⇒ ℾ⊨a |
| Identitateaa→a | Monotoniaℾ⊨a ⇒ℾ**∨ edozer** ⊨ | Kontraesanetik edozer⊥a ⇒ a⊨b |
| Baldintzaren legeaka→(b→a) a→(ㄱa→b) | Modus Ponensa→b; a⊨b |

**Sintaxia**

**Sistema axiomatikoak**

Corpus deduktiboa:

-Axiomak: frogatu gabe onartzen diren formulak

-Transformazio arauak: sistema osatzen duten formulak nola konbinatu eta transfotmatu esaten duten arauak

-Definizioak: zeinu batzuk erabiltzen dituzten formulak nola berridatzi beste zeinu batzuekin

Teoremak: sistemak frogatu duen formula bat.

**PM SISTEMA (FITXA)**

**DEDUKZIO NATURALA-GENTZEN**

-Corpus deduktiboa

 -Arau primitiboak: 8

 -Arau deribatuak: infinito, nano

… (FITXA)

**LOGIKA EZ KLASIKOAK**

Orain arte…Klasikoek

 -Bi baliotasuna

 -Extensionaltasuna (hizkuntza naturalak ez bezala)

 -Operatzaileek formulen hedadudari bakarrik eragin

 -Osagai atomikoen hedadura: formula osoaren balioa finkatuta

-Logika hedatuak:

 Klasikoko baliozkotasuna onartu, berriak gehitu

-Logika diberjenteak:

 Klasikoko baliozkotasun batzuk ukatu

 -Bi baliotasunaren aurka: etorkizuna, fikzioa…?

 -Propietate lausoak?

-Logika Balioaniztunak

 -finito/infinito

-Logika Modalak

 -Operatzaile logikoak extensionalak

 -Formula baten balioa bera osatzen duten p atomikoen hedadudaren, egia balioaren, arabera

 -Behin atomikoen esleipena jakinda, formularen balioa badakigu.

**Testuinguru intensionalak**

1. T Modalak: “beharrezko”, “kontingente”, “posible”...

Perpausen egia balioa ez da nahikoa proposizio osoaren egia balioa jakiteko.

 2. T Epistemikoak: “uste”:.

 Ez digu ezer esaten, ez du zerikusirik. Intensionala. Ez extensionala.

Ondorioa: Logika klasikoa (extensionala) ez da nahikoa testuinguru intensionalak formalizatzeko

 +Logika klasikoak ez du balio baliozkotasuna aztertzen.

Logika Modalak:

 **-C.I. Lewis**. XX mende hasiera.

 -Baldintza materialen zalantza: beste baldintza bat behar

 -Paradoxak.

 -PMko hiztegia, axiomak

 -Bi operatzaile berri.

 ☐Beharrezko

 ♢Posible

Definizioak

 ☐a: egiazkoa da w1-en, bbb w1ek sarbidea duen w guztietan b(a)=1

 ♢a: egiazkoa da w1en, bbb w1ek sarbidea duen w batean gutxienez b(a)=1

**METALOGIKA**

-Sistema logikoek dauzkate ezaugarri metalogikoak

-logikak izaera erreflexiboaµ

-Sistema guztiek betetzea nahi dugun ezaugarriak…

|  |  |
| --- | --- |
| Zuzentasuna-Zuzena da bbb frogatu daitekeen formula oro egia logikoa bada-⊢a ⊨ ⇒ ⊨a-bbb baliozkotasun semantikoa-bbb BEHARREZKOA den baliozkotasun sintaktikorako | OsotasunaOsoa da bbb posible bada edozein egia logiko deribatzea-⊨a ⇒ ⊢a |

“sistema tontoa” osoa bai, zuzena ez

Guk klasean emandakoa osoa eta zuzena

-Beste ezaugarri batzuk:

 -Konsistentzia: zuzentasuna bezala baina ahulago

 -Konsistentea da bbb ezin badira ⊢a eta ⊢ㄱa

 -Erabakigarritasuna

 -bbb badago metodo MEKANIKO bat edozein arentzat baliozkoa dela erabakitzen duena

 -Absurdoa, egia taulak…

 -Axiomen independentzia.

-Ezaugarri hauek soilik kanpotik aurkitu daitezke. Hori da metalogikaren funtzioa