<u>1 GAIA: ZENBAKIAK ETA IDAZKERA MATEMATIKOA</u>

1 Zientzia-idazkera

Naturan gertatzen diren hainbat fenomeno, zientziek formula matematikoen bidez adierazten dituzte, eta Matematikan arrazonamendu deduktiboa eta prozesu deduktiboa da arrazoitzeko modu nagusia.

Honela, abiapuntua egia bada, prozesu deduktiboaren bidez ondorio gisa lortzen dena egia da.

Aurretik onartutako proposizioetatik eta logikaren arauak jarraituz lortzen diren proposizio berriak egiak dira. Prozesu honi proposizio berrien frogapena deitzen zaio.

Logikan oinarrizko bi elementu daude: proposizioak eta konektiboak. **Proposizio** bat zalantzatarako tarterik uzten ez duen baieztapen argia da, **egia edo faltsua** izan daitekeena. (Aginduak eta galderak ez dira proposizioak). Proposizioak letra xeheen bidez adieraziko ditugu: p,q,r, ...

Adibideak. *"Gaur irailaren 15a da, osteguna da":"p"*
"$x + 4 = 9$ *eta* $x = 5$"*: "q"*
"4 *zenbakia* 2*-ren multiplo bat da": "r"*

Sarritan **aldagai** baten menpekoak diren proposizioak erabiltzen dira:
"x zenbaki bikoiti bat da" (x-ren balioaren arabera proposizioa egia edo gezurra izango da; proposizio familiak dira)

Definizioa. Konektiboek *oinarrizko proposizioen ondoan idatziz proposizio berriak sortzen dituzte eta ondoko ikurrak dira:*

(i) $\neg$*: "EZ"*

(ii) $\wedge$*: "ETA"*

(iii) $\vee$*: "EDO"*

(iv) $\Longrightarrow$*: "INPLIKATZEN"*

(v) $\Longleftrightarrow$*: "BALIOKIDE" edo "INPLIKAZIO BIKOITZA" edo "BALDIN ETA SOILIK BALDIN"*

Noiz dira proposizio berriak egia?

$\neg p$ egia da p gezurra bada

$p \wedge q$ egia da p eta q aldi berean egia badira

$p \vee q$ egia da, hasierako bi proposizioetatik bat gutxienez egia bada

Bestalde, $p \implies q$-ren esanahia: baldin eta p gertatzen bada, orduan q ere gertatzen da; p baldintza nahikoa da q gertatzeko; p-ri hipotesia deitzen zaio eta q-ri tesia. **Inplikazio kateatuak**: $p_1 \implies p_2$ eta $p_2 \implies p_3$ badira, orduan $p_1 \implies p_3$.

Oharra. *$p \implies q$ proposizioa eta $\neg q \implies \neg p$ baliokideak dira. Hau da, ez q egia izanik ez p egia dela frogatzen badugu prozesu hau, p egia izanik q egia dela frogatzearen baliokidea da.*

Adibidea. *p: x, 6-ren multiploa da*
q: x, 2-ren multiploa da
Orduan, $p \implies q$.

Metodo deduktiboaren egiaztapena (edo frogapena) egiteko prozedura: l proposizioa egia dela egiaztatu nahi badugu honela egin genezake: q proposizio batetik abiatuko gara, jakinez q egia dela. Inplikazio baten bidez beste proposizio bat m egia dela lortuko dugu. Eta horrela, hurrenez hurren, inplikazio kate baten bitartez l proposiziora helduko gara. Honela, l proposizioa egia dela frogatuko da.

2 Multzoak, Elementuak, Azpimultzoak

Multzoa: Objetu fisiko edo abstraktuen bilduma da; $A, B, C, \ldots$ letra maiuskulen bidez adierazten dira.

Multzoaren adierazpenak:

(i) Hedaduraz: $\{a, e, i, o, u\}$

(ii) Deskribapena emanez: $\{x \mid x \text{ bokala da}\}$

(Oharra: | edo : ikurrak **non** irakurtzen dira.)

Elementuak: Multzoaren objektuak dira; $a, 1, x, \ldots$ letra xeheen bidez adierazten dira.

Elementu eta multzo baten arteko erlazioa:

(i) $a \in A$: a barne A edo a, A-ren elementua da

(ii) $a \notin A$: a ez barne A edo a ez da A-ren elementua

Multzo hutsa: $\emptyset$, elementurik ez duena

Multzoaren kardinala: $|A|$ edo $\sharp A$, A multzoak dituen elementuen kopurua da. Adibidez, $\sharp\emptyset = 0$ da.

Multzoen arteko erlazioak

(i) $A = B$: A eta B multzoek elementu berdinak dituzte

(ii) $A \subset B$: A parte B da; A-ren elementu guztiak B-renak ere dira; A, B-ren azpimultzoa da; adibidez, $\emptyset \subset A$. Bestalde, $A \subseteq B$: A-ren elementu guztiak B-renak ere dira eta $A = B$ izan daiteke.

(iii) $A \not\subset B$: A ez da B-ren azpimultzoa

Multzoen bildura eta ebakidura

(i) $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$. A eta B multzoen bildura. A bil B irakurtzen da.

(ii) $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$. A eta B multzoen ebakidura. A ebaki B irakurtzen da.

Multzo osagarria: Izan bedi A multzoa E multzoaren azpimultzoa. E multzoarekiko A-ren **multzo osagarria** deitzen diogu ondoko multzoari: $A^c = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

A eta B multzoak **disjuntuak** direla esaten da baldin $A \cap B = \emptyset$ bada.

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

A eta B multzoen arteko **biderkadura kartesiarra**: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$. Adibidez, baldin eta $A = \{1, 2\}$ eta $b = \{a, e, i\}$ badira, orduan $A \times B = \{(1, a), (1, e), (1, i), (2, a), (2, e), (2, i)\}$.

Zeintzuk dira Matematikan multzo nabarmenak? Zenbakizko multzoak (geroago ikasiko ditugunak); Bektore fisikoak; Funtzio jarraiak,.....

ZENBATEKOTASUN IKURRAK

(i) $\forall$: "denak", "edozein", "oro"; $\forall a$

(ii) $\exists$: "existitzen da gutxienez bat"; $\exists a$

(iii) $\exists!$: "existitzen da bakar bat"; $\exists! a$

Adibidea. *Izan bedi D multzo bat.*

(i) $\forall x \in D,$ "*x zenbaki bikoitia da*"

(ii) $\exists x \in D$ *non* "*x zenbaki bikoitia den*"

(iii) $\exists! x \in D$ *non* "*x zenbaki bikoitia den*"

ZENBATEKOTASUN LEGEAK. Izan bitez D multzo bat eta $p(x)$ propietate bat.

(i) $\neg(\forall x \in D, p(x)) \Longleftrightarrow \exists x \in D, \neg p(x)$

(ii) $\neg(\exists x \in D, p(x)) \Longleftrightarrow \forall x \in D, \neg p(x)$

Adibidea. *Izan bitez D gela bateko ikasleak eta $p(x)$, mutila izatearen propietatea.*

(i) $\forall x \in D, p(x)$*: Gela horretako ikasle guztiak mutilak dira*

(ii) $\neg(\forall x \in D, p(x))$*: Ez da egia gela horretako ikasle guztiak mutilak direnik.*

(iii) $\exists x \in D \mid \neg p(x)$*: Gutxienez existitzen da gela horretako ikasle bat ez dena mutila.*

3 Zenbaki multzoak

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: Zenbaki arrunten multzoa da.

Hauen artean, zenbaki lehenak: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$.

Zenbaki arrunten deskonposaketa faktoriala, bere zatitzaile lehenen berreduren biderkadura da. Hain zuzen ere, m zenbaki osoa l zenbaki osoaren zatitzailea dela esaten da ($m \mid l$ idazten dena), baldin eta l zati m zatidura egiterakoan hondarra 0 bada.

Zenbaki arrunten deskonposaketa faktorialak balio digu bi zenbaki edo zenbaki gehiagoen arteko z.k.h = zkh edo/eta m.k.t = mkt lortzeko. Adibidez, $616 = 2^3.7.11$, $792 = 2^3.3^2.11$ eta $924 = 2^2.3.7.11$ izanik, orduan $z.k.h(616, 792, 924) = (616, 792, 924) = 2^2.11$ eta $m.k.t(616, 792, 924) = 2^3.3^2.7.11$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$: Zenbaki osoen multzoa da.

$\mathbb{Q} = \{p/q \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0\}$: Zenbaki arrazionalen multzoa da. Ohartu $2/3 = 4/6 = 5/15 = \cdots$ zenbaki berdinak direla. Gainera, $zkh(2,3) = (2,3) = 1$ denez, aurreko zenbakien ordezkari egokiena $2/3$ da. Bestalde, $(\mathbb{Q}, +, .)$ gorputz trukakorraren egitura du eta $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ betetzen da.

(Oharra: 0 zenbakiak ez du alderantzizkorik biderketareriko, hau da, $a/0$ ez dago definituta.)

Zenbaki arrazional bat era hamartarrean idatzi ez gero, zatiketa eginez agertzen diren zenbakien zifra hamartarren kopurua finitua edo infinitu errepikatua da; adibidez, $13/11 = 1,181818$........ Bestalde, infinitu zifra hamartar ez errepikakor bidez adierazitako zenbakiak ez dira arrazionalak, baizik eta zenbaki **irrazionalak** deitzen dira, eta zenbaki guzti hauen multzoa $\mathbb{I}$ bidez adierazten da. Definizioz $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ zenbaki errealen multzoa da. Nabaria da $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dela. Zenbaki errealak zuzen batetan adierazten dira, **zuzen erreala** deitzen dena, hau da, korrespondentzia biunibokoa dago $\mathbb{R}$ eta zuzen errealaren artean. Bereziki, zenbaki errealak ordenatuta daude.

Izan bitez $a, b \in \mathbb{R}$ non $a \leq b$ den. Definitzen dira ondoko tarteak: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$; $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$, eta modu berdinean definitzen dira $(a,b]$ eta $[a,b]$ tarteak. Baita ere, $(a,\infty), (-\infty,a]$ motatako tarteak defini daitezke.

$\mathbb{R}$-n **balio absolutua, distantzia eta inguruneak**

Definizioa. (i) $\forall a \in \mathbb{R}, |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \ \textit{bada} \\ -a, & a < 0 \ \textit{bada} \end{cases}$ *edo* $|a| = \sqrt{a^2}$

(ii) **Balio absolutuaren propietateak***:*

(a) $|a+b| \leq |a| + |b|$

(b) $||a| - |b|| \leq |a+b|$

(c) *Izan bedi* $a \in \mathbb{R}$ *eta* r *zenbaki erreal positiboa. Orduan,* $|a| < r \iff -r < a < r \iff a \in (-r,r)$*, eta* 0*-tik* a*-ra dagoen distantzia* r *baino haundiagoa da, hau da,* $|a| > r \iff a > r \vee a < -r \iff a \in (-\infty,-r) \cup (r,\infty)$

(iii) $\forall a, b \in \mathbb{R}, d(a,b) = |a-b|$. *Adibidez,* $d(-2,5) = |-2-5| = 7$

(iv) *Izan bedi* $a \in \mathbb{R}$ *eta* r *zenbaki erreal positiboa. Definizioz* a *puntuaren* r *erradioko ingurune (irekia) deitzen zaio* $(a-r, a+r) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < r\}$

tarteari. Adibidez, baldin eta $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *zenbaki errealen segidaren limitea* $l \in \mathbb{R}$ *bada, orduan honen esanahia,* $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n > n_0, |x_n - l| = d(x_n, l) < \varepsilon$ *da.*

4 Oinarrizko eragiketak adierazpen aljebraikoekin

Adierazpen aljebraikoa eragiketa ezberdinez lorturiko zenbaki eta letren arteko konbinazioa da.

Adibidea. $3x^2 - 5xy + 2y^3$, $2ab^3$, $\frac{5ax-2by}{4az^3+3b^2}$

Adierazpen aljebraikoaren **zenbakizko balioa** letra bakoitzari balio bat eman ondoren adierazitako eragiketa guztiak burutuz gero lortzen den zenbakia da.

Adibidea. $x^2 + 2y - 3z$ *adierazpenaren balioa* $x = 3, y = 2, z = 1$ *balioetarako* 10 *da.*

Adierazpen aljebraikoaren letrak biderkatzen eta zatitzen besterik agertzen direnean **monomioa** da.

Adibidea. $3ax^2, 4xyz^3, \frac{4xy^2}{2z^3}$

Batuketa eta kenketaren bidez elkarturiko monomioek sortzen duten adierazpen aljebraikoari **polinomioa** esaten zaio. Polinomioa osatzen duten monomioei polinomioaren **gaiak** esaten zaizkie. Bi gai dituen polinomioa **binomioa** deituko da. Polinomio bateko bi **gai antzekoak** direla esaten da baldin eta zenbakizko koefizientea baino ez badute desberdina. **Monomioaren maila** letra guztietako berretzaileak batzerakoan lortutako zenbakia da.

Adibidea. x^3yz^4 *monomioaren maila* 8 *da.*

Polinomioaren maila maila handieneko gaiaren maila da.

Adibidea. $x^2y + 2xy - 3x^2y^3$ *polinomioa* 5 *mailakoa da.*

Adierazpen aljebraikoen arteko **batuketa** eta **kenketa** gai antzekoak elkartuz lortzen da.

Adibidea. *Aurkitu* $A + B + C$ *eta* $A - B - C$ *non* $A = 7x + 3y^3 - 4xy$, $B = 3x - 2y^3 + 7xy$ *eta* $C = 2xy - 5x - 6y^3$ *diren.*

Ondoren adierazpen aljebraikoen arteko biderketa, zatiketa eta berreketarako ariketa batzuk planteatuko ditugu.

Ariketa 1. (i) *Biderkatu* $3xy - 4x^3 + 2xy^2$ *bider* $5x^2y^4$

(ii) *Zatitu* $2x^4 - 3x^3 + x^2 + x - 2$ *zati* $x^2 - 3x + 2$

(iii) *Kalkulatu* $(-3x^2y^3z)^4$

Biderkadura interesgarriak praktikarako

Ondoren azaltzen diren formulak sarritan aurkituko ditugun biderketen emaitzak dira:

(i) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(ii) $(a+b)(a+b) = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

(iii) $(a-b)(a-b) = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(iv) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(v) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(vi) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

(vii) $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$, non $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{m!}$, $n, m \in \mathbb{N}$ konbinazio zenbakiak diren eta "n gain m" irakurtzen den, $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1$ izanik. Bestalde, faktorialari buruzko ondoko propietateak betetzen dira:

(a) $0! = 1$

(b) Baldin eta $m < n$ bada, orduan $\binom{m}{n} = 0$

(c) $\binom{m}{0} = 1$

(d) $\binom{m}{1} = m$

(e) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

(f) $\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$

Aurreko

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k,$$

edozein n zenbaki arruntentzako, lortutako adierazpena **Newton-en Binomioa** deitzen zaio. Goiko propietateetatik ere **Tartagliaren hirukia** lortzen da:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$$

$$\binom{6}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{2}\binom{6}{3}\binom{6}{4}\binom{6}{5}\binom{6}{6}$$

hau da,

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{array}$$

Ariketa 2. *Hurrengo ataletako lehenengo adierazpenari bigarrena kendu:*

(i) $3xy - 2yz + 4xz, 3zx + yz - 2xy$

(ii) $4x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 2, 2x - y^2 + 3x^2 - 4y + 3$

(iii) $r^3 - 3r^2s + 4rs^2 - s^3, 2s^3 + 3s^2r - 2sr^2 - 3r^3$

Ariketa 3. *Burutu ondoko biderketak:*

(i) $(x^2 - 3x + 9)(x + 3)$

(ii) $(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)(x - y)$

(iii) $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)$

(iv) $(2x + y - z)(3x + y - z)$

Ariketa 4. *Kalkulatu hurrengo zatiketak:*

(i) $\frac{2x^4+3x^3-x^2-1}{x-2}$

(ii) $\frac{16y^4}{2y-1}, \frac{16y^4-1}{2y-1}$

(iii) $\frac{2x^6+5x^4-x^3+1}{-x^2+x+1}$

(iv) $\frac{x^4-x^3y+x^2y^2+2x^2y-2xy^2+2y^3}{x^2-xy+y^2}$

Ariketa 5. *Burutu adierazten diren eragiketak:*

(i) $(\frac{-1}{2}xy^2z^3)^3, (-2a^2b^3cx^2yz^2)^4$

(ii) $(a+5)^2, (x-7)^2, (x^2+2)^2, (x^2-y^2)^2$

(iii) $(x+1)^2-(x^2+1), (a+n)^2-(a^2+n^2)$

(iv) $(x+y)^3, (x-3y)^3, (x^2-y^2)^3, (1+\frac{1}{x})^3$

(v) $(x+y+z)^2, (x-y+z)^2, (a-b+c-d)^2$

(vi) $(x+y)(x-y), [(x+y)+7][(x+y)-7], (\frac{7x}{3}+3y)(\frac{7x}{3}-3y)$

5 Inekuazioak. Desberdintzak

1go mailako inekuazioak

(i) $\begin{cases} a<b \\ c<d \end{cases} \implies a+c<b+d$

(ii) $\begin{cases} a<b \\ c>0 \end{cases} \implies ac<bc$

(iii) $\begin{cases} a<b \\ c<0 \end{cases} \implies ac>bc$

(iv) $0<a<b \implies 1/a>1/b$

(v) $0>a>b \implies 1/a<1/b$

Adibidea. $(4-x)/5-(1-2x)/3 \geq 1+x \implies 3(4-x)-5(1-2x) \geq 15(1+x) \implies 12-3x-5+10x \geq 15+15x \implies -8x \geq 8 \implies x \leq -8/8 \implies x \leq -1.$

2garren mailako inekuazioak ebazteko pausuak: Inekuazioari elkartutako ekuazioa ebatzi eta emaitzak zuzen errealean irudikatu, edo inekuazioa faktorizatu eta lortutako zuzen errealeko puntuak mugatzen dituzten tarte bakoitzeko barruko puntuetan inekuazioaren desberdintza egiaztatzen den ala ez ikusi.

Adibidea. *Ebatzi* $x^2 - x - 6 < 0$ *inekuazioa.* $x^2 - x - 6 = 0$ *ekuazioaren emaitzak* $x = 3$ *eta* $x = -2$ *dira. Ondoren, emandako desberdintza aztertzen da* $(-\infty, -2), (-2, 3)$ *eta* $(3, \infty)$ *tarteetan, eta emaitza* $(-2, 3)$ *tartea da.*

$P(x)/Q(x) > 0$ **motatako Inekuazio arrazionalak ebazteko pausuak**: Ebatzi $P(x) = 0$ eta $Q(x) = 0$ ekuazioak, eta adierazi hauen emaitzak zuzen errealean. (Ohartu $Q(x) = 0$ egiten duten emaitzak ez direla inoiz hasierako inekuazioaren soluzioak, eta inekuazioa > 0 denean edo < 0 denean, ezta ere $P(x) = 0$ egiten duten emaitzak). Ondoren puntu guzti horiek mugatutako tarte irekiak kontutan izanik, tarte bakoitzeko barruko puntu batean hasierako inekuazioa egiaztatzen bada, tarteko puntu guztiak hasierako inekuazioaren soluzioak dira.

Adibidea. *Ebatzi* $(x^2 - 9)/(x + 1) \leq 0$. *Lehenik,* $x^2 - 9 = 0$*-tik* $x = 3$ *eta* $x = -3$ *lortzen da, eta* $x + 1 = 0$*-tik* $x = -1$. *Ondoren, hasierako inekuazioa* $(-\infty, -3), (-3, -1), (-1, 3)$ *eta* $(3, \infty)$ *tarteetan aztertzen da. Emaitza* $(-\infty, -3] \cup (-1, 3]$ *da.*

Ariketa 6. (i) *Adierazi grafikoki ondoko inekuazio sistema:*

$$2x - y < 4$$

$$x^2 + y^2 > 16$$

(ii) *Adierazi grafikoki ondoko inekuazioa:*

$$y \geq x^2 - 6x + 8$$

(iii) *Adierazi grafikoki ondoko inekuazio sistema:*

$$x + 2y \geq 5$$

$$x - y < 3$$

Ariketa 7. *Ebatzi ondoko inekuazioak:*

(i) $3 - 2x \geq 8 - 7x$

(ii) $\frac{1}{5}(6-2x) > \frac{1}{10}(1-x)$

(iii) $x^2 + 6x - 1 \leq 3x^2 + 3x - 6$

(iv) $3x^2 + 4 < x^4 + 3x^3 + 3x$

(v) $\frac{4x+x^2-2}{x^2+x} > \frac{x^2-2}{x}$

(vi) $2(x+3) > 3(x+2)$

(vii) $\frac{x-1}{4} - \frac{x+2}{3} > \frac{3x-1}{6} - x$

(viii) $x^3 - 5x^2 + 6x \leq 0$

(ix) $\frac{x^2+4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} > \frac{x+3}{x+2}$

(x) $|x-3| \geq 4.$

(xi) *(x)*$|x-4| < x-2$

(xii) $|2 + \frac{5}{x}| > 1$

(xiii) $\frac{-x^2+x+6}{x^2+1} \leq 0$