2 GAIA: ALJEBRA LINEALA ETA APLIKAZIOAK

1 Biderkadura eskalarra

Definizioa. *Izan bedi* $\mathbb{R}^n$ *espazio bektoriala eta* $v, w \in \mathbb{R}^n$ *edozein bi bektore. Finkatuta* $\mathbb{R}^n$*-ren* β *oinarri bat, demagun* $(x_1, \ldots, x_n)$ *eta* $(y_1, \ldots, y_n)$ *direla, hurrenez hurren,* v *eta* w*-ren koordenatuak* β *oinarriarekiko. Orduan,* v *eta* w *bektore bi hauen biderkadura eskalarra ondoko zenbaki errealaren bidez definitzen da,*

$$v.w = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Propietateak. *Aurreko definiziotik ondoko propietateak ondorioztatzen dira. Izan bitez* $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ *eta* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(i) $u.u \geq 0$; $u.u = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

(ii) $\alpha u.v = \alpha(u.v)$ *eta* $u.(\beta v) = \beta(u.v)$

(iii) $u.(v + w) = u.v + u.w$ *eta* $(u + v).w = u.w + v.w$

(iv) $u.v = v.u$

Definizioa. Bektoreen luzera *Aurreko baldintzetan, baldin eta* $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *bada,* v *bektorearen luzerari* norma edo modulua *deitzen zaio,* $||v||$ *edo* $|v|$ *bidez denotatzen dena eta ondoko balio duena,*

$$|v| = ||v|| = ({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2)^{1/2} = (v.v)^{1/2}.$$

Definizioa. 1 *normadun bektoreari* unitarioa *deitzen diogu. Aipa dezagun zeroren desberdina den edozein* v *bektorerekiko* $v/||v||$ *bektore unitarioa dela. Gainera,* v *bektorea ez nulua* $||v||$ *eskalarragatik zatitzen dugunean* v *bektorea* normalizatu *egin dugula esaten da.*

Definizioa. *Izan bitez* v, w *bi bektore.* $w - v$ *bektorearen definizioa kontuan hartuz gero honako hau dugu:* v*-ren muturretik* w*-ren muturrerako distantzia* $|w - v| = ||w - v||$ *dela.*

Teorema. *Izan bitez* $v, w \in \mathbb{R}^3$ *bi bektore eta* $0 \leq \theta \leq \pi$ *hauek sortutako angelua. Orduan,*

$$v.w = ||v||||w|| \cos \theta.$$

Beraz, baldin eta v *eta* w *bektoreak ez badira* 0, v *eta* w*-ren arteko angelua honela adieraz dezakegu:*

$$\theta = \arccos(v.w/||v||||w||).$$

Korolarioa. Cauchy-Schwarz-en desberdintza *Edozein v, w bektoretarako honako hau betetzen da,*

$$|v.w| \leq ||v||||w||.$$

Oharra. *Bereziki, v eta w ez badira zero, θ izanik haien arteko angelua, orduan $v.w = 0 \Longleftrightarrow \cos\theta = 0$ edo baliokide $\theta = \pi/2$ edo $\theta = -\pi/2$ bada. Beraz, bi bektore ez-nuluren arteko biderkadura eskalarra zero da baldin eta soilik baldin bi bektoreak perpendikularrak badira. Definizioz, bektore perpendikularrak* ortogonalak *direla esaten da.*

Adibidea. *Aurkitu $\mathbb{R}^3$-n $(1, 1, 1)$ eta $(1, 1, -1)$ bektoren arteko angelua.*

Definizioa. *$\mathbb{R}^3$-n oinarri kanonikoko bektoreak, hots, $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ eta $e_3 = (0, 0, 1)$ elkarrekiko orgonalak direnez, eta hauen luzera 1 denez, bektore* ortonormalak *deitzen zaie. Gainera, horrelako ezaugarriak betetzen dituen edozein bektoren sistemari* sistema ortonormala *deitzen zaio. Bereziki, zero bektorea bektore guztiekiko ortogonala dela joko dugu.*

2 Biderkadura bektoriala

Definizioa. *Izan bitez v, w, $\mathbb{R}^3$-ko edozein bi bektore. Finkatuta $\mathbb{R}^3$-ko oinarri kanonikoa, demagun (x_1, x_2, x_3) eta (y_1, y_2, y_3) direla, hurrenez hurren, v eta w-ren koordenatuak oinarri horrekiko. Orduan, v eta w-ren biderkadura bektoriala, zeina $v \times w$-ren bidez adierazten baitugu, ondoko bektore honen bidez definitzen da:*

$$v \times w = (x_2y_3 - y_2x_3, y_1x_3 - x_1y_3, x_1y_2 - y_1x_2)$$

$$v \times w = (x_2y_3 - y_2x_3)\bar{i} + (y_1x_3 - x_1y_3)\bar{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\bar{k}$$

(Gogoratu bi bektoreen biderkadura bektoriala beste bektore bat dela.)

Adibidea. $(3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) \times (\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}) = -\bar{i} + 4\bar{j} + 7\bar{k}$

Propietateak. *Izan bitez $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$ eta $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Orduan,*

(i) $u \times v = -(v \times u)$

(ii) $(\alpha u) \times v = \alpha(u \times v)$

(iii) $u \times v = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ *edo* $v = 0$ *edo, u eta v paraleloak dira*

(iv) $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$

Korolarioa. (i) *Ohartu* $v \times v = -(v \times v)$ *betetzen dela (i) propietateagatik. Beraz,* $v \times v = 0$

(ii) *Zehazki,* $\bar{i} \times \bar{i} = 0, \bar{j} \times \bar{j} = 0$ *eta* $\bar{k} \times \bar{k} = 0$.

(iii) *Gainera,* $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$ *eta* $\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$, *zeina* $\bar{i}, \bar{j}$ *eta* $\bar{k}$ *ziklikoki permutatuz gogora baitdezakegu.*

2.1 $b \times c$-ren interpretazio geometrikoa

Norabidea: Demagun a bektorea b eta c bektoreek sortutako planoan dagoela, hau da, existitzen direla α, β eskalarrak non $a = \alpha b + \beta c$ den. Kasu honetan, erraz ikusten da, $a.(b \times c) = 0$ betetzen dela, hau da, $b \times c$ bektorea ortogonala dela b-k eta c-k sortutako planoko edozein bektorerekiko.

Luzera:

$$||b \times c||^2 = (b_2c_3 - b_3c_2)^2 + (b_1c_3 - c_1b_3)^2 + (b_1c_2 - c_1b_2)^2.$$

Aurreko adierazpena garatuz, honen berdina dela ikusten da:

$$(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2 =$$

$$||b||^2||c||^2 - (b.c)^2 = ||b||^2||c||^2 - ||b||^2||c||^2(\cos\theta)^2 =$$

$$= ||b||^2||c||^2(\sin\theta)^2$$

non θ, b eta c-ren arteko angelua den, $0 \leq \theta \leq \pi$ izanik. Beraz, $||b \times c|| = ||b||||c||| \sin\theta|$. Beraz, aurreko bi emaitzak konbinatuz ondokoa dugu: $b \times c$ bektorea b-k eta c-k sortutako planoarekiko perpendikularra da, bere luzera $||b||||c||| \sin\theta|$ izanik.

Noranzkoa: Aztertzeko $b \times c$-ren noranzkoa eskuineko eskuaren araua kontuan hartu behar dugu.

Oharra. (i) *Baldin eta* b *eta* c *kolinealak badira, orduan* $\sin\theta = 0$ *da. Beraz,* $b \times c = 0$ *da.*

(ii) *Ez badira kolinealak, plano bat sortzen dute eta* $b \times c$ *bektorea plano horrekiko perpendikularra da.*

3 Aplikazio geometriko batzuk

3.1 Triangelu baten azalera

Erraz ondorioztatzen da, $b \times c$-ren luzera, hau da, $||b||||c||\,|\sin\theta|$, b eta c bektoreak albo-alde gisa dituen *paralelogramoaren* azalera dela.

Ondorioz, espazioko hiru puntuk sortzen duten triangelu baten azalera erraz kalkula daiteke. Izan bitez $a = (a_1, a_2, a_3), b = (b_1, b_2, b_3), c = (c_1, c_2, c_3)$ bektoreek adierazten dituzten espazioko puntuak (gogoratu puntu horien koordenatuak bektore horien osagaiak direla). Orduan, puntu horiek sortzen duten *triangeluaren azalera* $b - a$ eta $c - a$ bektoreek sortzen duten paralelogramoaren azaleraren erdia da. Beraz, triangeluaren azalera kalkulatzeko honako adierazpen hau erabil daiteke:

$$A = \frac{1}{2}||(b-a) \times (c-a)||.$$

3.2 Paralelopipedo baten bolumena

Izan bitez $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}, \overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$ eta $\overline{c} = c_1\overline{i} + c_2\overline{j} + c_3\overline{k}$, $\mathbb{R}^3$-ko bektoreak. Orduan, $\overline{a}, \overline{b}$ eta $\overline{c}$ ertzak dituen paralelopipedoaren bolumena ondoko determinantearen balio absolutua da:

$$\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\right|.$$

3.3 Zuzenaren ekuazio bektoriala

r zuzen baten ekuazioa kalkulatuko dugu, non $\overline{v}$ bektoreak zuzenaren norabidea adierazten duen, eta $\overline{a}$ bektorearen osagaiak r zuzeneko puntu bat den. Argi dago, λ parametroa aldatuz doan neurrian $(-\infty, \infty)$ tartean r zuzeneko puntu guztiak lortzen direla. Hortaz, r zuzenaren *ekuazio bektoriala* honela adieraz dezakegu:

$$r(\lambda) = \overline{a} + \lambda\overline{v}.$$

Ohartu $\overline{a}$ eta $\overline{b}$-ren muturretatik igarotzen den zuzenaren ekuazioa honako hau dela,

$$r(\lambda) = \overline{a} + \lambda(\overline{b} - \overline{a}).$$

Adibidea. *Zehaztu $\overline{j}$ bektorearen norabideko zuzenaren ekuazioa,* $(1, 0, 0)$ *puntutik igarotzen bada.*

$$r(\lambda) = (1, 0, 0) + \lambda(0, 1, 0) = (1, \lambda, 0).$$

Adibidea. *Aurkitu* $(-1, 1, 0)$ *eta* $(0, 0, 1)$ *puntuetatik igarotzen den zuzenaren* ekuazio bektoriala *eta* ekuazio parametrikoak.

Kasu honetan $\overline{a} = -\overline{i} + \overline{j}$ *eta* $\overline{b} = \overline{k}$ *dira. Beraz,*

$$r(\lambda) = (1 - \lambda)(-\overline{i} + \overline{j}) + \lambda\overline{k} = -(1 - \lambda)\overline{i} + (1 - \lambda)\overline{j} + \lambda\overline{k}.$$

Baliokidetasunez, $r(\lambda) = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ *denez,* $x = \lambda - 1, y = 1 - \lambda, z = \lambda$ *dira.*

Bestalde, osagaien bidez, (x_1, y_1, z_1) eta (x_2, y_2, z_2) puntuetatik igarotzen den zuzenak *ekuazio parametriko* hauek ditu:

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1).$$

λ ezabatuz gero, zuzenaren *ekuazio jarraitua* honela idazten da:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

3.4 Planoaren ekuazioa

Izan bitez Π plano bat, plano horretan muturra duen $\overline{a}$ bektore bat eta planoarekiko $\overline{n}$ bektore normal bat.

(Planoko puntuek $(\overline{r} - \overline{a}).\overline{n} = 0$ ekuazioa betetzen dute.)

Izan bedi $\overline{r} \in \mathbb{R}^3$. $\overline{r}$-ren muturra Π planoan dago baldin eta soilik baldin $\overline{r} - \overline{a}$ bektorea Π-rekiko paraleloa bada, eta beraz baldin eta soilik baldin $(\overline{r} - \overline{a}).\overline{n} = 0$ bada. Ondorioz, Π planoarekiko $\overline{n}$ bektore normala Π-rekiko paraleloa den edozein bektorerekiko perpendikularra da. Bestalde, biderkadura eskalarraren banatze-propietatea erabiliz goiko berdintzatik $\overline{r}.\overline{n} = \overline{a}.\overline{n}$ ondorioztatzen da. Izan bitez

$$\overline{n} = A\overline{i} + B\overline{j} + C\overline{k}$$

$$\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$$

$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}.$$

Hortaz, $\overline{r}.\overline{n} = \overline{a}.\overline{n}$ garatuz honako hau dugu:

$$Ax + By + Cz = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3,$$

baina eskuineko aldea konstantea denez, Π *planoaren ekuazioa* honela idatz dezakegu:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

non $D = -(Aa_1 + Ba_2 + Ca_3)$ baita.

Adibidea. *Aurkitu* $\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$ *bektorearekiko* $(1,0,0)$ *puntua daukan plano ortogonal baten ekuazioa. (Emaitza: aurreko adierazpenetik* $1(x-1)+1(y-0)+1(z-0)=0$ *dugu, alegia,* $x+y+z=1$ *ekuazioa dugu.)*

Adibidea. *Aurkitu* $(1,1,1),(2,0,0)$ *eta* $(1,1,0)$ *puntuak dituen planoaren ekuazioa. Bi metodo daude:*

1. Metodoa: Edozein planotako ekuazioa $Ax+By+Cz+D=0$ *erakoa da.* $(1,1,1),(2,0,0)$ *eta* $(1,1,0)$ *puntuak planoan daudenez honako hau dugu:*

$$A+B+C+D=0$$

$$2A+D=0$$

$$A+B+D=0$$

Koefiziente horien balioak mugatuta daudenez multiplo bat izan ezik horietariko baten balioa finkatu ahal dugu eta besteak era bakar batean finkatuta geratuko dira. Horrela, $D=-2$ *egiten badugu, orduan* $A=1$*,* $B=1$ *eta* $C=0$ *dira. Beraz, puntu horiek dituen planoaren ekuazioa* $x+y-2=0$ *da.*

2. Metodoa: Izan bitez $\overline{a}=\overline{i}+\overline{j}+\overline{k}$*,* $\overline{b}=2\overline{i}$ *eta* $\overline{c}=\overline{i}+\overline{j}$ *puntu horietan bere muturra daukaten bektoreak. Planoarekiko edozein bektore normalek* $\overline{a}-\overline{b}$ *eta* $\overline{c}-\overline{b}$ *bektoreekiko normala izan behar du. Beraz,* $\overline{n}=(\overline{a}-\overline{b})\times(\overline{c}-\overline{b})$ *planoarekiko normala da. Kalkula dezagun biderkadura bektorial hau:*

$$\overline{n}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-\overline{i}-\overline{j}.$$

Hortaz, planoaren edozein ekuazio $-x-y+D=0$ *erakoa da (multiplo eskalar bat izan ezik). Bestalde,* $(2,0,0)$ *planoan dagoenez,* $D=2$ *ordezkatuz gero* $x+y-2=0$ *dugu.*

3.5 Puntu batetik plano baterako distantzia

Demagun $E=(x_1,y_1,z_1)$ puntutik $Ax+By+Cz+D=0$ ekuazioko planora dagoen distantzia aurkitu behar dugula.

Izan bedi $R=(x_0,y_0,z_0)$ puntua $Ax+By+Cz+D=0$ planoko puntu bat. Kontsidera dezagun bektore hau:

$$\overline{n}=\frac{A\overline{i}+B\overline{j}+C\overline{k}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

zeina bektore unitarioa eta planoarekiko normala baita.

Beraz, $\overline{n}$-ren gaineko $\overline{v} = \overline{RE}$ bektorearen proiekzioaren luzera $d = |ER|$ distantzia da, hain zuzen ere, eta ondorioz, honako hau dugu:

$$d = |\overline{v}.\overline{n}| = |[(x_1 - x_0)\overline{i} + (y_1 - y_0)\overline{j} + (z_1 - z_0)\overline{k}].\overline{n}| =$$
$$= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Bestalde, $R = (x_0, y_0, z_0)$ puntua Π planokoa denez, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ dugu. Berdintza hori aurreko formulan ordezkatuz formula hau lortzen dugu:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

4 Matrizeak

$m \times n$ matrize bat zenbaki errealen bi dimentsioko ordenazio bat da, m errenkadetan eta n zutabetan banatuta, hau da,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(Era labur batetan $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dela esaten da. Testu honetan matrizearen gaiak zenbaki errealak direla joko dugu). $m = n$ denean, A *matrize karratu* bat dela esaten da. Matrize karratu batetan, a_{11}-etik a_{nn}-rako lerro zuzen berean dauden gaien multzoa *diagonal nagusia* deitzen da. Jarraian matrizeen batuketa, eskalar batezko biderketa eta biderketak aztertuko ditugu.

(i) **Batuketa.** Izan bitez A eta B, $m \times n$ ordenako bi matrize. Hauen batuketa (edo kenketa) ondoko $m \times n$ ordenako matrizea da:

$C = A + B($ edo $C = A - B)$, non $c_{ij} = a_{ij} + bij($ edo $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$ baita.

Argi denez, $A + B = B + A$.

(ii) **Eskalar batezko biderketa.** Baldin eta A, $m \times n$ ordenako matrizea bada eta λ eskalar bat, orduan $C = \lambda A$-rentzat c_{ij} bakoitza λa_{ij}-ren berdina dira.

(iii) **Biderketa.** Baldin eta A, $n \times m$ ordenako eta B, $m \times p$ ordenako badira, orduan $C = A.B$ matrizearen gaiak ondokoak dira:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}, \text{ edozein } i \in \{1, \dots n\}, j \in \{1, \dots, p\}\text{-rentzat}$$

Ohartu A-ren $i$garren errenkada bakoitza B-ren $j$garren zutabeagatik (bektore gisa kontsideratuz) biderkatzen direla, biderkadura eskalarra erabiliz.

Biderketaren propietateak

(a) Elkartze-propietatea: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ guztietarako honako hau betetzen da:

$$A(BC) = (AB)C.$$

(b) Matrize-batuketarekiko banatze-propietatea:

i. $\forall A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B, C \in \mathbb{R}^{n\times p}, A(B + C) = AB + AC.$

ii. $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, C \in \mathbb{R}^{n\times p}, (A + B)C = AC + BC.$

iii. Matrize-biderketarekiko eskalar batezko biderketaren banatze-propietatea: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}, \lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$

iv. $n\times n$ ordenako matrizeari non diagonal nagusian denak 1a eta hortik kanpo besteak 0 diren, n ordenako identitate matrizea deitzen zaio eta I_n bidez denotatzen da. Argi dago edozein $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$-rentzat, $I_nA = A$ eta $AI_n = A$ dela.

v. Oro har matrizen biderketa ez da trukakorra; ikusi ondoko adibidea.

Adibidea. *Izan bitez* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *eta* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, *orduan* $AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *da eta* BA *ez dago definiturik.*

5 Determinanteak

Honela definitzen da 2×2 ordenako matrizeen determinanteak:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, eta 3×3 ordenakoa ondoko eran definitzen da,

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11})$, zeinari Sarrus-es erregela deitzen zaio.

Ondoren 2×2 eta 3×3 ordenako matrizeen determinanteen definizioak orokortu ahal dira $n \times n$ matrizeetarako. Lehendabizi ikus ditzagun beste definizio batzuk:

(i) A-ren azpimatrizea A-tik ateratako matrize bat da, A-ren errenkada eta /edo zutabe batzuk ezabatuz lortzen dena.

(ii) $A = (a)$, 1×1 ordenako matrizea bada, orduan $detA = a$.

(iii) M_{ij} minore osagarria edo soilik minorea deitzen zaio, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrizetik i. errenkada eta j. zutabea kenduz lortzen den $(n-1) \times (n-1)$ azpimatrizearen determinanteari.

(iv) a_{ij} gaiaren adjuntua edo kofaktorea $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ da.

(v) Baldin eta $n > 1$ eta $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ badira, honela kalkula daiteke A matrizearen determinantea:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \text{ edozein } i \in \{1, 2, \ldots, n\} - \text{tarako}$$

edo

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \text{ edozein } j \in \{1, 2, \ldots, n\} - \text{tarako.}$$

Determinantearen propietate nagusiak:

(i) Matrize bateko errenkada edo zutabe bat zeroz osatuta badago, haren determinantea zero da.

(ii) Bi errenkada (edo bi zutabe) trukatzen badira, determinantearen zeinua aldatzen da.

(iii) Matrize batek bi errenkada (edo bi zutabe) berdinak baditu, haren determinantea zero da.

(iv) Errenkada (edo zutabe) bateko gaiak zenbaki batez biderkatzen (edo zatitzen) badira, determinantea zenbaki horretaz biderkaturik (zatiturik) geratzen da.

(v) Matrize batek bi errenkada (edo bi zutabe) proportzional baditu, haren determinantea zero da.

(vi) Matrize bateko errenkada (edo zutabe) bati beste errenkada (zutabe) batzuen konbinazio lineal bat batzen bazaio, determinantearen balioa ez da aldatzen.

(vii) Matrize bateko errenkada (edo zutabe) bateko gai bakoitza l batugaiek osatuta badago, determinantea deskonposa daiteke l determinanteen batura batetan, non batugai-determinante bakoitzaren gainerako errenkadak lehenengoaren berdinak diren, eta errenkada (edo zutabe) hartako gai bakoitza h batugaietariko bat den, batugaien ordenari jarraituz. Adibidez,

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} & a_{13}+b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(viii) Matrize bateko errenkada (edo zutabe) bat beste errenkada (zutabe) batzuen konbinazio lineala bada, haren determinantea zero da.

(ix) A eta B, $n\times n$ ordenako matrizeak badira, orduan $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Determinantea kalkulatzeko beste metodo batzuk:

Chio-ren erregela: Bilatzen da zero gehien daukan errenkada edo zutabea. Errenkada (edo zutabe) horretan zero ez den zenbaki bat aukeratzen da (hots, pibotea), eta beste zenbaki batzuez biderkatuz, zero bihurtzen dira errenkada (edo zutabe) horretako gai ez nuluak. Era horretan determinantearen formularen aplikazioa asko laburtzen da.

Matrize bat triangeluar bihurtzea: Metodo hau erabili ohi da programatzeko ordenagailu bidez. Diagonal nagusiaren azpian zeroak bakarrik dauzkan matrizeari *matrize goi-triangeluar* deitzen zaio. Aldiz, diagonal nagusiaren gainean zeroak bakarrik dauzkan matrizeari *matrize behe-triangeluar* deitzen zaio. Beraz, matrize bat triangeluar bihurtzea matrize hori goi edo behe-triangeluar bihurtzea da. Demagun, adibidez, behe-triangeluar bihurtu nahi dugula. Dakigunez, errenakada bati batzen badiogu beste errenkada bat zenbaki batez biderkaturik, determinantearen balioa ez da aldatzen (ikusi determinantearen propietateak). Beraz, zero egiteko diagonalaren azpian, lehenengo zutabearekin hasiko gara eta a_{11} pibote gisa aukeraturik, zero egingo ditugu $a_{21}, \ldots, a_{n1}$ gai guztiak. Gero gauza bera egingo dugu bigarren zutabearekin a_{22} pibote gisa aukeratuz, zero bihurtuz $a_{32}, \ldots, a_{n2}$ gai guztiak, gure helburua lortu arte.

Matrize motak:

A matrize bat A^t *matrize iraulia* bihurtzen da A-ko errenkadak A^t matrizearen zutabeak badira (eta, beraz, A-ko zutabeak A^t-ko errenkadak dira). Matrize bat iraultzeko eragiketak propietate hauek ditu:

(i) $(A^t)^t = A$

(ii) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(iii) $(AB)^t = B^t A^t$

(iv) Baldin eta λ eskalar bat bada, orduan $(\lambda A)^t = \lambda A^t$

(v) $\det A^t = \det A$.

Baldin eta $A^t = A$ bada, A matrizea *simetrikoa* dela esaten da eta $A^t = -A$ bada, A matrizea *antisimetrikoa* dela esaten da (bereziki, bigarren kasu honetan $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$-rentzako $a_{ii} = 0$ da.) Argi dago matrize simetrikoek eta antisimetrikoek karratuak izan behar dutela.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize bat *alderanzgarria* da, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize bat existitzen bada, non $AB = BA = I_n$ den. B delako hori, existitzen bada, A^{-1} bidez adierazten dugu eta A-ren *alderantzizkoa* deitzen zaio. Alderantzizkoa existitzen bada, bakarra da.

Bestalde, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize baten *adjuntua* honela definitzen da,

$$A^+ = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Hor A_{ij}, a_{ij} gaien kofaktoreak dira (hau da, zeinudun minoreak), baina irauliak. Matrize karratu baten *alderantzizko matrizea* aurkitzeko formula hau dugu:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^+.$$

Adibidea. *Aurkitu* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ *matrizearen alderantzizkoa. (Emaitza:* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/2 & -3 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ *da.)*

$\det A = 0$ denean A matrizea *singularra* dela esaten da eta $\det A \neq 0$ denean, A *ez singularra edo erregularra* dela esaten da.

Teorema. *A, $n \times n$ ordenako matrizea alderanzgarria da baldin eta soilik baldin A ez bada singularra.*

Ondoren alderantzizko matrizearen propietate batzuk enuntziatuko ditugu:

(i) Matrize alderanzgarri baten alderantzizko matrizea bakarra da

(ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

(iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iv) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

(v) $\det(A^{-1}) = 1/\det A$

Definizioa. *Baldin eta $A^{-1} = A^t$ bada, orduan A matrizea* ortogonala *dela esaten da.*

Matrize ortogonalei buruzko propietate batzuk:

(i) A ortogonala bada, A^t ere bai; izan ere, $(A^t)^t = (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

(ii) A ortogonala bada, $(\det A)^2 = \det A . \det A^t = \det(AA^t) = \det I_n = 1$ dugu. Beraz, $\det A = 1$.

(iii) Matrize bat ortogonala bada, bi errenkadeen biderkadura eskalarra (errenkanda bakoitza bektoretzat harturik) zero da, eta errenkada baten eta errenkada berberaren arteko biderkadura eskalarra 1 da.

Adibidea. $A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ *matrize ortogonala da.*

6 Autobalioak eta autobektoreak

Izan bedi $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrizea. λ zenbaki erreala A-ren *autobalio edo balio propio* bat dela esaten da, $\overline{x} \neq \overline{0}$ bektore bat existitzen bada, non $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ betetzen baita ($\overline{x}$ zutabe-bektore gisa idatziz). $\overline{x}$ bektoreari λ-ri elkarturiko *autobektorea edo bektore propioa* deitzen diogu.

(i) $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$ betetzen bada, honako hau dugu:

$$A\overline{x} - \lambda\overline{x} = A\overline{x} - \lambda I_n\overline{x} = (A - \lambda I_n)\overline{x} = \overline{0},$$

eta azken berdintza hau garatuz hau lortzen da:

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

hau da, ekuazio-sistema homogeneo bat. Beraz, $\overline{x} \neq \overline{0}$ denez, hau da, sistema horrek soluzio ez nuluak dituenez, koefiziente matrizearen determinanteak zero izan behar du. Beraz, $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

(ii) $\det(A - xI_n)$ kalkulatuz lortzen den $p(x)$ polinomioari A-ren *polinomio karakteristikoa* deitzen zaio.

(iii) Ondorioz, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrize baten *autobalioak edo balio propioak* $p(x)$ polinomio karakteristikoaren n erroak dira.

(iv) n erroak desberdinak badira, *autobalio bakun* deitzen zaie. Erro batzuk berdinak badira, *erro anikoitzak* deitzen zaie.

Ariketa 1. *Izan bedi* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Aurkitu A-ren autobalioak (balio propioak) eta autobektoreak (bektore propioak).*

7 Ekuazio linealen sistemak. Gauss-en metodoa

Izan bedi m ekuazio linealetako eta n ezezagunetako ekuazio-sistema

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,$$

non a_{ij} sistemaren koefizienteak, b_i koefiziente askeak eta x_j ezezagunak baitdira, $i = 1, 2, \ldots, m$ eta $j = 1, 2, \ldots, n$ direlarik. Sistema batek soluziorik izateko bete behar dituen baldintzak aztertzea da gure helburua, eta ahal denean, soluzioak kalkulatzea, hau da, sistema horretako ekuazio guztiak betetzen dituzten $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n-kote guztiak aurkitzea.

Aurreko ekuazio-sistema era matrizealean, $AX = B$ adierazpenaren bidez eman daiteke, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ eta $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ direlarik.

7.1 Sistema linealen sailkapena

Sistemaren soluzio-kopuruaren arabera sailkapen hau eman daiteke:

(i) *Sistema bateragarriak*: gutxienez soluzio bat dutenak. Hauek bi motatakoak izan daitezke.

  (a) *Sistema bateragarri determinatuak*: soluzio bakar bat dutenak.

  (b) *Sistema bateragarri indeterminatuak*: infinitu soluzio dituztenak.

(ii) *Sistema bateraezinak*: soluziorik ez dutenak.

Definizioa. *Bi ekuazio linealetako sistemak* baliokideak *direla esaten da, baldin eta soluzio berdinak badituzte.*

Baldin eta ondoko matrizeari *matrize zabaldua* deitzen badiogu:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

ekuazio linealetako sistema baten matrize zabalduari ondoko aldaketak egiten badizkiogu, beste ekuzio linealetako sistema baliokide baten matrize zabaldua lortzen da:

(i) errenkadeen edo ezezagunen zubabeen ordena aldatzea

(ii) errenkada bateko koefiziente guztiak nulua ez den konstante bategatik biderkatzea

(iii) errenkada bat errenkada beraren ete beste errenkada batzuen konbinazio linealarekin ordezkatzea

(iv) errenkada bat beste errenkada batzuen konbinazio lineala denean, errenkada hau kentzea, hau da, errenkada horri dagokion ekuazioa ezabatzea.

Ohartu A matrizea, $\overline{A}$ matrizearen azpimatrizea dela.

Definizioa. *Izan bedi t zenbaki arrunta non $t \leq m$ eta $t \leq n$. Orduan, A-ren $t \times t$ ordenako azpimatrize karratu baten determinanteari t* ordenako minore *deitzen zaio.*

Definizioa. *Baldin eta A-tik ateratako t ordenako minoreren bat 0 ez bada eta ordena haundiagoko minore guztiak (existitzen baldin badira) zero badira, A matrizearen* heina *t dela esaten da eta $h(A) = t$ bidez adierazten da.*

Teorema. Rouché-Frobenius-en Teorema. *Izan bedi $AX = B$, n ezezagun dituen ekuazio linealetako sistema eta $\overline{A}$ honen matrize zabaldua. Orduan:*

(i) *Baldin eta $h(A) = h(\overline{A}) = n$ bada, sistema bateragarri determinatua da.*

(ii) *Baldin eta $h(A) = h(\overline{A}) < n$ bada, sistema bateragarri indeterminatua da.*

(iii) *Baldin eta $h(A) \neq h(\overline{A})$ bada, sistema bateraezina da.*

Adibidea. *Demagun 3 ezezagunetako $AX = B$ ekuazio linealetako sistema dela, non matrize zabaldua ondokoa den:*

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -8 \\ -4 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sistema hau bateraezina da $h(\overline{A}) = 4 \neq h(A) = 3$ delako.

Bestalde, matrize zabaldua ondokoa bada,

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -5 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

sistema bategarri determinatua da, $h(\overline{A}) = h(A) = 3$ delako.

7.2 Gauss-en metodoa

$AX = B$ ekuazio linealetako sisteman A matrizea triangeluarra izango balitz, oso erraz ebatziko genuke sistema. Adibidez, hona hemen 3 ezezagun eta 3 ekuazioko sistema lineal bat:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Azken ekuaziotik oso erraz aska daiteke x_3-a. Balio hori bigarren ekuazioan ordezka daiteke eta hortik x_2 aska daiteke. Azkenik, x_3 eta x_2-ren balioak ordezkatzen dira lehenengo ekuazioan eta x_1 bakantzen da. Beraz, sistemaren matrizea goi-triangeluarra bada, sistema erraz ebazten da behetik gora, hau da, atzerantza.

Ohartu Gauss-en metodoa A matrizea triangeluar bihurtzean datzala. Baina hala egiten badiogu A matrizeari, $\overline{A}$ barnean B zutabea ere aldatuko da, eta modu horretan sistema triangeluar baliokide *bat lortuko dugu (gogoratu matrize zabalduari egiten ahal dizkiogun transformazioak,* **errenkadetakoak bakarrik***). Beraz, sistema honen emaitza gure jatorrizko sistemaren emaitza izango da.*

Oharra. *Triangeluar bihurtzean a_{ii} pibotea zero bada, bilatuko dugu beheko ekuazio bat, non $a_{ki} \neq 0$, $(k > i)$ betetzen baita, eta k-garren ekuazioa permutatuko (trukatuko) dugu i-garren ekuazioagatik. Gero, jarraituko dugu triangeluar bihurtzeko prozesuan aurrera, arinago deskribatu den bezala.*

Gauss-en metodoa erabil daiteke sistema bat aztertzeko. Hona hemen gerta daitezkeen kasuak:

(i) *Baldin eta k-garren ekuazio batean koefiziente guztiak* 0 *bihurtu badira (hau da, $a_{k1} = a_{k2} = \ldots = a_{kn} = 0$) eta eskuineko gaia b_k ez bada* 0 *bihurtu, orduan sistema* bateraezina *da.*

(ii) *Aurreko kasua ez bada gertatzen, sistema* bateragarria *da. Izan bedi h ekuazio ez-nuluen kopurua prozesu honen bukaeran. Orduan, bi kasu hauek gerta daitezke:*

$h = n$ *bada, orduan sistema* bateragarri determinatua *da.*

$h < n$ *bada, orduan sistema* bateragarri indeterminatua *da.*

Adibidea. *Askatu ondoko sistema Gauss-en metodoa erabiliz:*

$$x - 3y + 2z = 9$$

$$-2x - 3z = -6$$

$$4x - 10y + 9z = 12$$

Ebazpena:

Sistema honi dagokion matrize zabaldua ondokoa da:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -3 & -6 \\ 4 & -10 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Demagun L_i, igarren errenkada dela, $i = 1, 2, 3$. Aukeratu $a_{11} = 1$ pibotea. L_1 errenkada berdin utziko dugu. Jarraian zeroak egingo ditugu a_{11}-en azpian, L_2 eta L_3 errenkadak aldatuz.

$\overline{L_2} = L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 = L_2 + 2L_1$ *izango da, eta*
$\overline{L_3} = L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 = L_3 - 4L_1$ *izango da.*

Horrela matrize zabaldua beste honetan bihurtuko da:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & -6 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & 1 & -24 \end{pmatrix}.$$

Orain $a_{22} = -6$ pibotea izango da. L_1 eta $\overline{L_2}$ lerroak berdin utziko ditugu. Jarraian zeroak egingo ditugu a_{22}-ren azpian, $\overline{L_3}$ lerroa aldatuz.

$\overline{\overline{L_3}} = \overline{L_3} - \frac{a_{32}}{a_{22}} \overline{L_2} = \overline{L_3} + \frac{2}{6} \overline{L_2}$ *izango da.*

Horrela, matrize zabaldua beste honetan bihurtuko da:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & -6 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 8/6 & -20 \end{pmatrix}.$$

Beraz, matrize zabaldu horri dagokion sistema triangeluarra ondokoa da:

$$x - 3y + 2z = 9$$

$$-6y + z = 12$$

$$\frac{8}{6} z = -20.$$

Orain, banan banan eta behetik gora, ezezagunak askatuko ditugu:

3. *ekuaziotik,* $z = -\frac{20}{8/6} = -15$ *dugu.* 2. *ekuaziotik,* $y = \frac{12-z}{-6} = \frac{12-(-15)}{-6} = -\frac{9}{2}$ *dugu, eta* 1*go ekuaziotik,* $x = 9 + 3y - 2z = 9 + 3(-\frac{9}{2}) - 2(-15) = \frac{51}{2}$ *dugu. Beraz, sistema honek eta jatorrizko sistemak baliokideak direnez gero, soluzio berdina dute:* $(x, y, z) = (\frac{51}{2}, -\frac{9}{2}, -15)$.

Beste metodo bat sistema bat askatzeko Cramer-en erregela da.

Definizioa. *Ekuazio linealetako sistema bat*Cramer-en motakoa *dela esaten da, baldin eta ekuazioen eta ezezagunen kopurua berdina bada eta koefizienteen matrizea erregularra (ez singularra) bada. Hau da, n ekuazio linealetako eta n ezezaguneko sistema hau Cramer-en motakoa da:*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

non

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

erregularra baita (hots, $detA \neq 0$). Ondorioz, sistema bateragarri determinatua izango da, (izan ere $h(A) = h(\overline{A}) = n$), eta honen soluzioa honela kalkulatzen da:

$$x_1 = \frac{1}{detA} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}, x_2 = \frac{1}{detA} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\ldots, x_n = \frac{1}{detA} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Adibidea. *Ebatzi ondoko ekuazio linealetako sistema hau Cramer-en erregela erabiliz:*

$$x - 3y + 2z = 9$$

$$-2x - 3z = -6$$

$$4x - 10y + 9z = 12.$$

Ebazpena: Aurreko sistema era matrizialean idatzia:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \\ 4 & -10 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Kasu honetan sistema Cramer-en motakoa da; izan ere, ezezagunen eta ekuazioen kopurua berdina da eta $detA = -8 \neq 0$. Beraz, sistemaren soluzioa honako hau da:

$$x = \frac{1}{-8} \begin{vmatrix} 9 & -3 & 2 \\ -6 & 0 & -3 \\ 12 & -10 & 9 \end{vmatrix} = \frac{51}{2}, y = \frac{1}{-8} \begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ -2 & -6 & -3 \\ 4 & -12 & 9 \end{vmatrix} = -\frac{9}{2},$$

$$z = \frac{1}{-8}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 9 \\ -2 & 0 & -6 \\ 4 & -10 & 12 \end{vmatrix} = -15.$$

7.3 Aplikazioak: planoen eta zuzenen arteko posizioak

$\mathbb{R}^3$-ko bi zuzenen arteko posizioak

Izan bitez $\mathbb{R}^3$-ko era parametrikoan idatzita dauden bi zuzen:

$$r_1(t) = \overline{a} + t\overline{u} \Longleftrightarrow (x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(u_1, u_2, u_3)$$

$$r_2(t) = \overline{b} + t\overline{v} \Longleftrightarrow (x, y, z) = (b_1, b_2, b_3) + t(v_1, v_2, v_3)$$

eta

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \end{pmatrix}.$$

A matrizearen heinaren bidez jakingo dugu bi zuzenen norabideen posizioak. Hots,

(i) *$h(A) = 1$ bada, $\overline{u} = \lambda\overline{v}$ betetzen da, eta orduan, bektore bi hauek kolinealak dira.*

(ii) *$h(A) = 2$ bada, $\overline{u}$ eta $\overline{v}$ ez dira kolinealak.*

$\overline{A}$ matrizearen heinaren bidez jakingo dugu $\overline{u}, \overline{v}$ eta $\overline{b} - \overline{a}$ bektoreen posizioa. Azken bektoreak jatorria lehenengo zuzenean dauka eta muturra bigarren zuzenean, hau da, bi zuzenak lotzen ditu. Beraz, ondoko kasu hauek gerta daitezke:

(i) *$h(A) = 2$ eta $h(\overline{A}) = 3$ badira, hiru bektoreak ez daude plano berean; hau da bi zuzenak elkar gurutzatzen dira.*

(ii) *$h(A) = 2$ eta $h(\overline{A}) = 2$ badira, $\overline{b} - \overline{a}$ bektorea beste bien konbinazio lineala da. Beraz, hiru bektoreak plano berean daude eta $\overline{u}$ eta $\overline{v}$ kolinealak ez direnez, zuzen biak elkar ebakitzen dute.*

(iii) *$h(A) = 1$ eta $h(\overline{A}) = 2$ badira, $\overline{u}$ eta $\overline{v}$ kolinealak dira, baina ez $\overline{b} - \overline{a}$ bektorearekin. Orduan zuzen biak paraleloak dira.*

(iv) *$h(A) = 1$ eta $h(\overline{A}) = 1$ badira, $\overline{u}, \overline{v}$ eta $\overline{b} - \overline{a}$ bektoreak kolinealak dira. Beraz, zuzen biak zuzen berdina dira.*

Adibidea. *Aurreko metodoa erabiliz, egiaztatu ondoko bi zuzenak paraleloak direla: $r_1(t) = (1, -3, -2) + t(2, 4, 1)$ eta $r_2(t) = (3, 2, 0) + t(4, 8, 2)$.*

$\mathbb{R}^3$-ko bi planoen arteko posizioak

Izan bitez $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ *eta* $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ *ekuazioak dituzten bi plano eta kontsidera dezagun ondoko bi matrizeak:*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

A matrizearen bidez jakin dezakegu bi planoetako bektore normalen arteko posizioa (hots, kolinealak diren ala ez). Horretarako goiko atalean bezala, $h(A)$ kalkulatuko dugu. Ondorioz,

(i) *$h(A) = 2$ bada, orduan bi bektore normalak ez dira kolinealak, eta derrigorrez plano biak elkar ebaki behar dute, eta haien ebakidura zuzen bat da.*

(ii) *$h(A) = 1$ bada, orduan bi bektore normalak kolinealak dira eta $h(\overline{A})$-ren arabera ondoko kasu hauek gerta daitezke:*

  (a) *$h(\overline{A}) = 1$ bada, lehenengo ekuazioa lor dezakegu bigarrena zenbaki batez biderkatuz. Beraz, plano berdina adierazten dute.*

  (b) *$h(\overline{A}) = 2$ bada, bi ekuazioak desberdinak dira, baina bektore normalak kolinealak dira. Beraz, planoak paraleloak dira.*

Adibidea. *Egiaztatu ondoko bi ekuazio hauetako planoek zuzen batetan elkar ebakitzen dutela: $2x + 3y - 5z = 0$ eta $x - 4y + 6z + 3 = 0$. Kalkulatu zuzen horren ekuazio parametrikoak.*

$\mathbb{R}^3$-ko planoen eta zuzenaren arteko posizioak

Demagun $a_1x+b_1y+c_1z = d_1$ eta $a_2x+b_2y+c_2z = d_2$ planoek l zuzena determinatzen dutela. Izan bedi $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ ekuazioko π planoa. Ezagutzeko l-ren eta π-ren arteko posizioa, ondoko matrizeen heinak aztertuko behar dira:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \overline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}.$$

A-ko lehenengo bi errenkadak elkar ebakitzen duten bi planoetako bektore normalak direnez, $h(A)$ gutxienez 2 da. Ondorioz, kasu hauek gerta daitezke:

(i) *$h(A) = 3$ bada, hiru ekuazioko sistemak soluzio bakar bat dauka, eta 3 planoek puntu batean ebakitzen dute elkar. Beraz, l-k eta π-k puntu bakar batean ebakitzen dute elkar.*

(ii) *$h(A) = 2$ bada, bi kasu hauek ditugu:*

$h(\overline{A}) = 2$ bada, hirugarren ekuazioa (π planoarena) lor dezakegu aurreko biak konbinatuz. Horrenbestez, sistemak infinitu soluzio dauzka eta l zuzena π planoan dago.

$h(\overline{A}) = 3$ bada, sistemak ez dauka soluziorik. Ondorioz, l eta π paraleloak dira.

Adibidea. *Aztertu ondoko zuzen hau:*

$$x + y - z - 3 = 0$$

$$2x + 3y + 4z + 1 = 0,$$

eta $3x + 5y + z + 5 = 0$ planoaren arteko posizioa. (Emaitza: elkar ebakitzen dute $(10, -7, 0)$ puntuan.)

8 Ariketak

Ariketa 2. *Kalkulatu bi bektore unitario, ez paralelo eta ortogonal $(1, 2, 0)$ bektorearekiko.*

Ariketa 3. *Aurkitu $(1, 3, 2)$ eta $(0, 1, 1)$ bektoreeekiko ortogonala den bektore unitario bat.*

Ariketa 4. *Kalkulatu $P_1 = (1, 2, 3)$ eta $P_2 = (-1, 4, 0)$ espazioko bi puntuen arteko distantzia.*

Ariketa 5. *Kalkulatu $7\overline{i} + 3\overline{j}$ eta $-\overline{k} + \overline{i}$ bektoreen arteko angelua eta bektore bi hauen biderkadura bektoriala.*

Ariketa 6. *Izan bitez $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_r}$ bektore ez nulu elkarrekiko ortogonalak, hau da, $\overline{a_i}.\overline{a_j} = 0$ baldin eta $i \neq j$ bada. Izan bitez $c_1, \ldots, c_r$ zenbakiak, non $c_1\overline{a_1} + \ldots + c_r\overline{a_r} = \overline{0}$ betetzen den. Frogatu $c_i = 0$ dela, $i = 1, \ldots, r$-rentzat.*

Ariketa 7. *Izan bitez $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, 3 bektore. Frogatu adibide baten bidez $a.c = b.c$ izan daitekeela eta b eta a ez izan bektore berdinak.*

Ariketa 8. *Aurkitu $(2, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ eta $(0, 3, -2)$ puntuetatik pasatzen den planoaren ekuazioa.*

Ariketa 9. *Aurkitu $(1, 2)$, $(0, 1)$ eta $(-1, 1)$ erpinak dituen triangeluaren azalera.*

Ariketa 10. *Izan bedi ondoko bi plano hauek zehazten duten zuzena:*

$$2x + y + 5z = 2$$

$$3x - 2y + z = 3.$$

Aurkitu zuzen honen norabide bektorea eta kalkulatu zuzenaren ekuazio bektorial bat.

Ariketa 11. *Ebatzi ondoko ekuazio matrizeala:* $XA+B = C$, *non* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ *eta* $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ariketa 12. *Kalkulatu ondoko determinanteak:*

$$\text{(i)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\text{(ii)} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -8 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

Ariketa 13. *Frogatu berdintza hauek determinantearen propietateak erabiliz:*

$$a) \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = (1-3x)(1+x)^3; b) \begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = abc + (ab+bc+ac)x; d) \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

Ariketa 14. *Kalkulatu ondoko determinanteak, determinatearen propietateak erabiliz:*

$$a) \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}, b) \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$c)\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ b & a & b & \dots & b & b \\ b & b & a & \dots & b & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

Ariketa 15. *Kalkulatu matrize hauen alderantzizkoak:*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ariketa 16. *Izan bitez* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *eta* $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *matrizeak.*

(i) *Aurkitu, ahal denean,* AB, AC, BC *eta* CA *biderkadurak.*

(ii) *Kalkulatu* A*-ren,* B*-ren eta* C*-ren irauliak.*

(iii) *Kalkulatu* ABC *eta* ACB*.*

Ariketa 17. *Izan bedi* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ *matrizea.*

(i) *Kalkulatu* $B = A^2 - 2A$

(ii) *Zehaztu* λ*-ren balioak* B *matrizeak alderantzizkoa izan dezan.*

(iii) *Kalkulatu* B^{-1}*,* $\lambda = 1$ *baliorako.*

Ariketa 18. *Aztertu* m *parametroaren arabera ondoko matrizearen heina:*

$$A = \begin{pmatrix} m & m-1 & m(m-1) \\ m & 1 & m \\ m & 1 & m-1 \end{pmatrix}.$$

Ariketa 19. *Ebatzi ondoko* $AX = B$ *ekuazio linealetako sistemak, Rouché-Frobenius-en teorema eta Gauss-en metodoa erabiliz, non sistema hauen* $\overline{A}$ *matrize zabalduak ondokoak diren:*

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 1 \\ 2 & 4 & -2 & | & 4 \\ 3 & -2 & 2 & | & 5 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 2 \\ 2 & -1 & -1 & | & 2 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ -2 & 1 & -1 & | & -4 \\ 3 & -2 & 1 & | & -4 \end{pmatrix}$

Ariketa 20. *Ebatzi m parametroaren arabera ondoko ekuazio linealetako sistema:*

$$x + my + z = m + 2$$

$$x + y + mz = -2(m + 1)$$

$$mx + y + z = m.$$

Ariketa 21. *Kalkulatu a-ren balioa, ondoko r eta s zuzenak plano berdinean egon daitezen, eta ondoren kalkulatu plano honen ekuazioa.*

$r : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2z = a \end{cases}$

Ariketa 22. *Aztertu $\pi : x + ay - z = 1$ planoak eta $r : \begin{cases} 2x + y - az = 2 \\ x - y - z = a - 1 \end{cases}$ zuzenak elkar osatzen duten posizioa, a parametroaren balioen arabera.*

Ariketa 23. *Izan bitez ondoko bektoreak: $u = (2, 3, 5)$, $v = (6, -3, 2)$, $w = (4, -6, 3)$, $p = (8, 0, a)$ eta ondoko planoak $\pi : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda u + \nu v$ eta $\pi' : (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda w + \nu p$. Aztertu π eta π' planoen elkar arteko posizioa a parametroaren balioen arabera.*

Ariketa 24. *Aztertu ondoko planoen posizioa m parametroaren balioen arabera.*

$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1 + m)y + mz = m + 1 \end{cases}$

Ariketa 25. *Kalkulatu $r : \begin{cases} x + 2z = 5 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$ zuzenaren paraleloa den zuzen baten ekuazioa, aldi berean $s : \frac{x-1}{4} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ zuzenak eta $\pi : x - y + z = 7$ planoak ebakitzen duten puntutik pasatzen delarik.*

Ariketa 26. *Kalkulatu r zuzenaren ekuazioa, $p = (2, 0, -1)$ puntutik pasatzen bada eta ondoko bi zuzenak ebakitzen baditu:*

$$s_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1}, s_2 = \begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases} .$$

Ariketa 27. *Izan bitez ondoko bi planoak: $\pi : ax+y+z = a$ eta $\pi' : x-ay+az = -1$. Frogatu edozein a baliorako aurreko bi planoak zuzen batetan ebakitzen dutela. Lortu a parametroaren balioaren arabera zuzen bakoitzaren norabide bektorea.*