Aljebra, 1.ariketa R-en

Aitor Saiz Telleria

May 22, 2015

1 Enuntziatua

A=$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$ matrizea emanik,

1. Zer baldintza bete behar dituzte a eta b matrize diagonalizagarria izan dadin?
2. Diagonalizagarria bada, eman bere forma diagonala D eta aldaketa matrizea P.
3. Idatzi A eta D matrizeen arteko erlazioa.

2 Ebazpena

Lehenik bere ekuazio karakteristikoa ebatziko dugu:
$|(A - \lambda * I)|$

$\lambda * I = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ hau horrela, $|(A - \lambda * I)| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & a \\ 3 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix}$

Hiru balio propio lortuko ditugularik: $\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = b \quad \lambda_3 = -1$, eta lambadaren edozein balioren anizkoitasuna bat izango da kasu honetan.
Orain balio propio bakoitzari dagokion bektore propioa kalkulatuko dugu, baikoitzaren espazio nulua atereaz.

$$1)\text{N}(A - 5 * I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & a \\ 3 & 0 & b-5 \end{pmatrix} \rightarrow_{P_{31}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & b-5 \\ 0 & -6 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Menpeko\ aldagaiak(pibotedunak) : x, y$
$Aldagai\ askea : z$

$$\begin{cases} 3x \qquad +(b-5) = 0 \\ \qquad 6y \quad +az = 0 \end{cases}$$

$x = \dfrac{-(b-5)}{3} z$

$y = \frac{a}{6}z$

$$S_H = z\begin{pmatrix} \frac{-(b-5)}{3} \\ \\ \frac{a}{6} \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beraz dimentsioa dimN(A-5I)=1

$$2)\text{N}(A{-}b{*}I))\begin{pmatrix} 5-b & 0 & 0 \\ 0 & -1-b & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow_{D_3((5-b)/3);E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 5-b & 0 & 0 \\ 0 & -1-b & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Menpeko\ aldagaiak(pibotedunak) : x, y$
$Aldagai\ askea : z$

$$\begin{cases} (5-b)x = 0 \\ (-1-b)y + az = 0 \end{cases}$$

y=$\frac{az}{1+b}$

$$S_H = z\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{1+b} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hots, dimN(A-bI)=1

Hemen $b \neq -1$ eta $b \neq -5$ bete behar da, a-k edozein balio har dezakeen arren.

$$3)\text{N}(A{+}1{*}I)\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b+1 \end{pmatrix} \rightarrow_{D_3(2);E_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2b+2 \end{pmatrix} \rightarrow_{D_3(a/(2b+2));E_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Menpeko\ \ aldagaiak(pibotedunak) : x, z$
$Aldagai\ \ askea : y$

$$\begin{cases} 6x = 0 \\ az = 0 \end{cases}$$

$S_H = y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
$Beraz \quad dimentsioa: \quad dimN(A+1I)=1$

Kasu guztietan anizkoiztasun aljebraikoa eta geometrikoa berdinak direnez gero, esan dezakegu existitzen dela D matrize diagonala, eta baita A matrizea diagonalizagarria dela ere. Hori bai, betiere aipatutako baldintzak betetzen badira.

$$D=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

P A matrizearen balio eta bektore propioez osatutako matrizea da:

$$P=\begin{pmatrix}\frac{-b+5}{3} & 0 & 0\\ \frac{a}{6} & -1 & \frac{a}{1+b}\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Badakigunez A eta D matrizeen arteko erlazioa formula honek ezartzen duela, $D = P * A * P'$, horretaz baliatuko gara, R erabiliz.

Hasteko, sor dezagun a matrizea, a eta b-ri guk nahi ditugun bi balio emanez:

```
A <- matrix(c(5,0,3,0,-1,0,0,3,4),3,3)
> A
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    5    0    0
[2,]    0   -1    3
[3,]    3    0    4

A matrizea egin ostean, bere balio propioak nahiz bektoreak lor ditzakegu eigen() funtzioa

> eigen <- eigen(A)
> eigen
$values
[1]  5  4 -1

Hemen ikus dezakegu lehen eskuz ateratako balioak errespetatzen direla.
```

```
$vectors
          [,1]      [,2] [,3]
[1,] 0.2857143 0.0000000    0
[2,] 0.4285714 0.5144958    1
[3,] 0.8571429 0.8574929    0
```

$vectors Honako hau da P matrizea, balio propioen bektoreek osatutako matrizea, hain zuzen

```
> P <- eigen$vectors
> P
          [,1]      [,2] [,3]
[1,] 0.2857143 0.0000000    0
[2,] 0.4285714 0.5144958    1
[3,] 0.8571429 0.8574929    0
```

Errore txiki horiek borobiltzeko round() funtzioaz baliatuko gara, matrize hau lortuz emai

```
> round(P)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    0    0    0
[2,]    0    1    1
[3,]    1    1    0
```

P-ren alderantzizkoa behar dugunez, solve() funtzioari dei egingo diogu:

```
> Pal <- solve(P)
> Pal
          [,1] [,2]     [,3]
[1,]  3.500000    0  0.00000
[2,] -3.498571    0  1.16619
[3,]  0.300000    1 -0.60000
```

Eta atzera balioak borobildu, lehen bezala.

```
> round(Pal)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    4    0    0
[2,]   -3    0    1
[3,]    0    1   -1
```

A,P eta P' matrizeak jada baditugunez, orain D matrize diagonala lor dezakegu erraz asko:

```
> D <- Pal %*% A %*% P
> D
              [,1]         [,2] [,3]
[1,]  5.000000e+00 0.000000e+00    0
[2,] -1.332268e-15 4.000000e+00    0
```

```
[3,]  2.220446e-16 1.110223e-16   -1
```

Borobildu ostean:

```
> round(D)
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    5    0    0
[2,]    0    4    0
[3,]    0    0   -1
```

Eta diag funtzioarekin gauza bera eginda, ikus dezakegu zuzen egin dugula eragiketa guztia

```
> DD <- diag(eigen$values)
> DD
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    5    0    0
[2,]    0    4    0
[3,]    0    0   -1
```

Beraz, D eta DD matrizeak berdinak direnez, argi dago A matrizea diagonalizagarria dela a=