Mekanika (II)

Zinematika: Higidura Arruntak

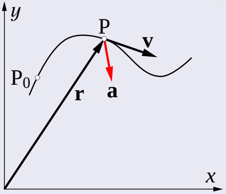
Oscar Ecenarro
oscar.ecenarro@ehu.es

Zinematika

Zer aztertzen du Zinematikak?

Partikula edo gorputz baten higidura, eta bertan:

- Ibilbidea,
- Posizio-bektorea ($\mathbf{r}$),
- Abiadura-bektorea ($\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$),
- Azelerazio-bektorea ($\mathbf{a} = \mathrm{d}\mathbf{v}/\mathrm{d}t$).



Ez da arduratzen higidura sortzen duten kausetaz.

- Goian aitapuriko magnitude guztiak, orokorrean, denboraren funtzioan aldatuko dira: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$.
- Ibilbidean barrena ibilitako distantzia: $\widehat{P_0P} = s(t)$.

Higidura Dimentsio Bakarrean

- Ez da izaera bektorialik erabili behar, baina kontuz zeinuekin!
- Denboraren jatorria, higidura hasten den aldiunean: $t_0 = 0$.

Higidura uniformeki azeleratua

- $a = \text{kte} \neq 0$
- $v = v_0 + at$
- $s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad [1]$

Higidura uniformea

- $a = 0$
- $v = v_0 = \text{kte}$
- $s = s_0 + v_0 t$

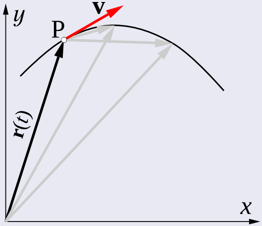
- Beste adierazpen interesgarri bat higidura uniformeki azeleratuan:

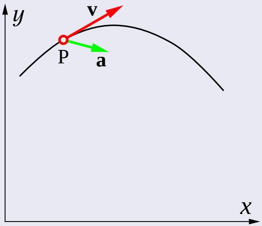
$$t = \frac{v - v_0}{a} \xrightarrow{[1]} \boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(s - s_0)}$$

ZTF-FCT

Higidura bi eta hiru dimentsiotan

Abiadura eta Azelerazioaren Definizio Bektorialak





- **Abiadurak**

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{\lim} \mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

Batez Bestekoa **Aldiunekoa**

- **Azelerazioak**

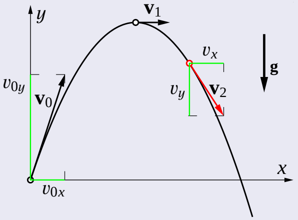
$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{\lim} \mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$$

Batez Bestekoa **Aldiunekoa**

ZTF-FCT

Adibidea: Tiro Parabolikoa

Tiro Parabolikoa



- Higidura Uniformeki Azeleratua:

$$\mathbf{a} = \mathbf{g} = -g\,\mathbf{j} \equiv (0, -g)$$

- Horizontalean: Higidura uniformea

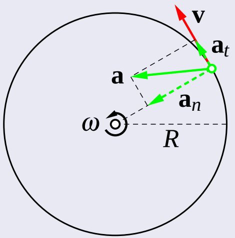
$$a_x = 0 \rightarrow \begin{cases} v_x = \text{kte} = v_{0x} \\ x = x_0 + v_{0x}t \end{cases}$$

- Bertikalean: H. uniformeki azeleratua

$$a_y = -g \rightarrow \begin{cases} v_y = v_{0y} - gt \\ y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Adibidea: Higidura Zirkularra

Lehenik eta behin, $s = R\theta \;\rightarrow\; v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t = R(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)$ [θ erradianetan]



- Azel. tangentziala:

$$a_t = \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = \alpha R$$

- Azel. normala:

$$a_n = v^2/R = \omega^2 R$$

- Abiadura eta azelerazio angeluarrak

$$\omega = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t \qquad \alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$$

- Higidura lineala ↔ Higidura angeluarra

$$\omega = v/R \qquad \alpha = a_t/R$$

- Higidura uniformea: $\omega = \text{kte}$

$$\theta = \theta_0 + \omega t$$

- H. uniformeki azeleratua: $\alpha = \text{kte}$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

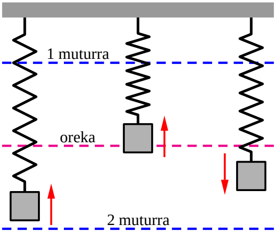
- Bai eta:

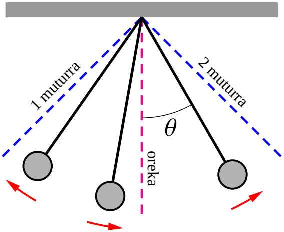
$$\boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta}$$

ZTF-FCT

Higidura Periodikoa

- Naturan zehar dugun higidurarik zabalduenetarikoa da.
- Magnitude zinematikoak errepikatu egiten dira denboraz denbora: $f(t+T) = f(t)$, non f den posizioa, abiadura edo azelerazioa.
- T delakoari **periodo** deritzo, eta halako higidurari, **periodikoa**.
- Kasurik errazena aztertuko dugu: dimentsio bakarrean gertatzen dena.
- Oreka-puntu batekiko gorputz edo partikula batek egiten duen joan-etorriko higidura da.

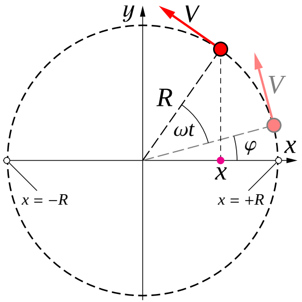




Higidura Harmoniko Sinplea (HHS)

- Higidura periodiko arruntenetariko bat da (zirkular uniformea bestea).
- Funtzio matematiko periodiko ezagunena sin (cos) delakoa da.
- Partikularen posizioaren adierazpena honela idatz daiteke:

$$\boxed{x(t) = R\cos(\omega t + \varphi) \qquad x(t+T) = x(t)}$$



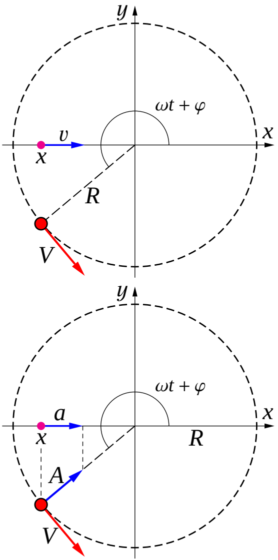
- Matematikoki, higidura zirkular uniforme baten proiekzioa da x ardatzaren gainean.
- Irudian:
  - x delakoa **elongazioa** da.
  - R delakoa **anplitudea** da (elongazio maximoa).
  - ω delakoa **maiztasun angeluarra** da.
  - φ delakoa **hasierako fasea** da.
  - $\omega t + \varphi$ delakoa **fasea** da.

- Higidura periodikoa izan dadin, $x(t+T) = x(t)$ dela bete behar da:

$$\cos[\omega(t+T)+\varphi] = \cos[(\omega t+\varphi)+\omega T] = \cos(\omega t+\varphi) \;\rightarrow\; \boxed{\omega = 2\pi/T}$$

ZTF-FCT

HHS: abiadura eta azelerazioa



- Abiadura, alde batetik, x-ren norabidean V-ren proiekzioa da, $\theta = \frac{\pi}{2} + (\omega t + \varphi)$ izanik, eta bestetik, elongazioaren deribatu denborala da:

$$v = \begin{cases} V\cos\theta = -V\sin(\omega t + \varphi) \\ \dot{x} = -\omega R\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

- Abiad. maximoa: $\boxed{x = 0 \;\rightarrow\; v_{\max} = \pm V = \pm\omega R}$
- Abiad. minimoa: $\boxed{x = \pm R \;\rightarrow\; v = 0}$
- Azelerazioa, alde batetik, x-ren norabidean A-ren proiekzioa da, $\theta = \pi + (\omega t + \varphi)$ izanik, eta bestetik, abiaduraren deribatu denborala da:

$$a = \begin{cases} A\cos\theta = -A\cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{v} = -\omega^2 R\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \end{cases}$$

- Azel. max.: $\boxed{x = \pm R \;\rightarrow\; a_{\max} = \mp A = \mp\omega^2 R}$
- Azel. min.: $\boxed{x = 0 \;\rightarrow\; a = 0}$

ZTF-FCT

HHS: laburpen gisa

Higidura-ekuazioak. . .

- Elongazioa $x = R\cos(\omega t + \varphi)$
- Abiadura $v = -\omega R\sin(\omega t + \varphi) = \omega R\cos[(\omega t + \varphi) + \frac{\pi}{2}]$

. . . eta grafikak

HHS: laburpen gisa

Higidura-ekuazioak...

- Elongazioa $x = R\cos(\omega t + \varphi)$
- Abiadura $v = -\omega R\sin(\omega t + \varphi) = \omega R\cos[(\omega t + \varphi) + \frac{\pi}{2}]$
- Azelerazioa $a = -\omega^2 R\cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 R\cos[(\omega t + \varphi) + \pi] = -\omega^2 x$

... eta grafikak