AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE MÉTODOS NUMÉRICOS - Ing. De Organización Industrial
Examen Parcial - 11 de Noviembre de 2016

Puntuación total: 20 puntos

1.- A) Obtener en forma **binómica**

a) $\dfrac{(1-i)^{10}}{(\sqrt{3}\ i-1)^4}$ (1 punto)

b) $\dfrac{i^{1121}}{1+2i}$ (0.5 puntos)

B) Hallar en forma **binómica** las raíces de la ecuación $2z^2-(1+3\,i)z-2=0$.

(1.5 puntos)

Solución:Aa) $-\sqrt{3}+i$ **Ab)** $(1/5)(2+i)$ **B)** $z=1+i,\quad z=-1/2+i/2$

2.- A) Definir el concepto de convergencia lineal de orden 1 de un método numérico, analizando su significado en función de los valores de la constante que aparece en la definición.

(1.5 puntos)

B) Dada la función $f(x)=e^x+x^2-2$ y operando con redondeo a **6 dígitos significativos**:

a) Localizar gráficamente sus raíces en intervalos de amplitud 0.5 unidades.

(1.25 puntos)

Solución: $p_1 \in (0.5,1),\ \ p_2 \in (-1.5,-1)$

b) Para la raíz más **pequeña,** reducir el intervalo que la contiene a uno de amplitud menor que una décima mediante la aplicación del método de bisección.

(1.25 puntos)

Solución: $[a_3,b_3]=[-1.375,-1.3125]$

c) Para la misma raíz, buscar una función g(x) para la que el método iterativo de punto fijo sea linealmente convergente. Comparar su velocidad de convergencia con la del método de bisección. Calcular la raíz utilizando esta función g(x) y tomando como valor inicial el extremo derecho del intervalo $[a_n,\ b_n]$ del apartado anterior.

(2.75 puntos)

Solución: $g(x)=-\sqrt{2-e^x}\quad x_0=-1.325,...,x_3=x_4=-1.31597$

d) Tomando como aproximaciones iniciales los extremos del intervalo obtenido en el apartado **b)**, calcular de nuevo dicha raíz, con una precisión del 0.05%, mediante el método de la secante. (1.5 puntos)

Solución: $p \approx x_3 = -1.31597$

3.- Se considera la EDO de primer orden $y'-3y=e^t\cdot y^2$. Se pide:

a) ¿Se puede asegurar, sin resolver la ecuación diferencial, que exista una sola solución de la de la ecuación anterior que sea **continua para todo** $t\in\mathbb{R}$ y que cumpla que y(0) =0? ¿y que cumpla que $y(1)=-4/e$? Justificar las respuestas.

(1 punto)

b) Hallar la solución general de la EDO. (2.25 puntos)

Solución: $y = \dfrac{1}{-(1/4)e^{t} + Ce^{-3t}}$

c) Encontrar ahora, si es posible, la forma explícita de los dos problemas de valor inicial planteados en el apartado 1. (1 punto)

Solución: $y = -4e^{-t}$

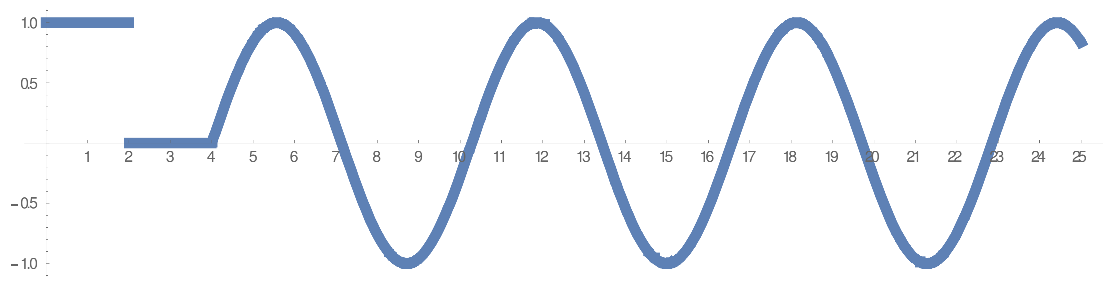
4.- **a)** Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y'' - y' + y = \operatorname{sen}(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$ (2 puntos)

Solución: $y(t) = \cos(t)$

b) Calcular la transformada de Laplace de la función representada en la siguiente gráfica. Enunciar y demostrar la propiedad de desplazamiento necesaria para calcular dicha transformada.

Nota: La curva sinusoidal representada es un desplazamiento de la función seno.



(2.5 puntos)

Solución:
$$f(t) = (1 - H(t-2)) + H(t-4)\operatorname{sen}(t-4)$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} - e^{-4s}\frac{1}{s^2+1}$$

TIEMPO: 1 hora y 45 minutos

AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE MÉTODOS NUMÉRICOS - Ing. en Organización Industrial
Primera Parte - 10 de Enero de 2017

Puntuación total: 16 puntos

Nota: Sólo podrá utilizarse calculadora en el ejercicio 2.

1.- **a)** Calcular en forma binómica el número complejo z, sabiendo que una de sus raíces cuartas es $\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\ i}$. (0.75 puntos)

b) Calcular las otras 3 raíces cuartas de dicho número complejo z e interpretarlas geométricamente. (0.75 puntos)

Solución: 1a) $-2+2i\sqrt{3}$

1b) $z_{1,3}=\sqrt{2}\left(\pm\sqrt{3}/2\pm i/2\right)$, $z_{4,2}=\sqrt{2}\left(\pm 1/2\mp\sqrt{3}\ i/2\right)$

2.- Dada la función $f(x)=(x-2)^2-Ln(x)$

a) Localizar gráficamente sus raíces en intervalos de amplitud 1 unidad. (1 punto)

Solución: $p_1\in(1,2)$, $p_2\in(3,4)$

b) Para la segunda raíz reducir el intervalo que la contiene a uno de amplitud menor que una décima, mediante el método de bisección. (1 punto)

Solución: $[a_4,b_4]=[3,3.0625]$

c) A partir de los resultados del apartado anterior y trabajando con seis dígitos significativos, calcular dicha raíz mediante la aplicación de un método iterativo de punto fijo con convergencia lineal de primer orden con una precisión del 0.005%. Tomar como valor inicial el extremo derecho del intervalo $[a_n,b_n]$ del apartado **b)**.

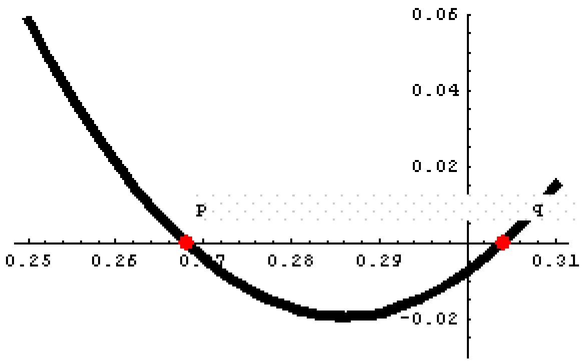
(1.75 puntos)

Solución: $g(x)=2+\sqrt{Ln(x)}$ $x_0=3.0625,...,x_3=3.05712$

d) Tomando de nuevo como valor inicial el extremo derecho del intervalo $[a_n,b_n]$ del apartado **b)**, calcular de nuevo dicha raíz mediante la aplicación del método de Newton-Raphson. (1.25 puntos)

Solución: $x_2=x_3=3.05710$

3.- Sea una función f(x), cuya gráfica y raíces son las que se muestran a continuación:



¿Es el punto $x_0 = 0.28$ un valor inicial válido para aproximar **la segunda raíz** (es decir, la raíz q) mediante el método de Newton-Raphson? ¿Para qué valores iniciales podemos garantizar la convergencia del método hacia esta segunda raíz? **Justificar la respuesta**. (1 punto)

4.- A) Dada la ecuación diferencial $y - x \cdot y' = a(1 + x^2 \cdot y')$ $\quad a > 1$

a) ¿Por qué puntos (x_0, y_0) puede asegurarse directamente que pasa una única solución? (0.5 puntos)

Solución: $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ salvo en rectas $x = 0$ y $x = -1/a$

b) ¿Existe alguna solución que cumpla que y(0) = 4? ¿Y que y(0) = a? ¿Y que y(-1/a) = 4? (1.75 puntos)

Sol. general ecuación: $y = a + \dfrac{cx}{x + 1/a}$

c) Hallar la solución que cumple que $y(1) = \dfrac{a^2 + 2a}{a + 1}$, indicando el intervalo en el que es válida. (0.5 puntos)

Solución: $y = a + \dfrac{x}{x + 1/a}$ en $(-1/a, \infty)$

B) Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y' = \frac{1}{3}\left[(1 - 2t)y^4 - y\right] \qquad \text{(2 puntos)}$$

Solución: $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{c e^t - (2t + 1)}}$

5.- A) Resolver el siguiente problema de valor inicial usando la transformada de Laplace:

$$y''(t)\text{-}2y'(t)\text{+}y(t) = e^{t-1}, \quad \text{con} \quad y(1)=0, \quad y'(1)=5 \qquad \text{(2.25 puntos)}$$

Solución: $y(t) = 5(t - 1)e^{t-1} + (1/2)(t - 1)^2 e^{t-1}$

B) Calcular la transformada de Laplace de la función $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t < 1 \\ (t-1)^2 + 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$.

(1.5 puntos)

Solución: $\mathcal{L}\{f(t)\} = 1/s + 2e^{-s}/s^3$

TIEMPO: 1 hora y 30 minutos

AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE MÉTODOS NUMÉRICOS - Ing. en Organización Industrial

Examen Parcial - 10 de Enero de 2017

TIEMPO: 1 hora y 30 minutos **Puntuación total: 15 puntos**

Nota: Sólo podrá utilizarse calculadora en el último ejercicio.

1.- Resolver el sistema homogéneo

$$\underset{\sim}{u}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \underset{\sim}{u} \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{u}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(2.75 puntos)

Solución: $\underset{\sim}{u} = 3e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2e^{2t}\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3e^{2t}\begin{pmatrix} 6t - 5t^2/2 \\ -5t \\ 1 \end{pmatrix}$

2.- Demostrar que si **r** es un valor propio asociado a la ecuación diferencial homogénea de coeficientes constantes $a_0 \cdot y^{n)}(x) + a_1 \cdot y^{n-1)}(x) + ... + a_{n-1} \cdot y'(x) + a_n \cdot y(x) = 0$,

entonces su vector propio asociado es $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{r} \\ \mathbf{r}^2 \\ . \\ . \\ \mathbf{r}^{n-1} \end{pmatrix}$. (1.5 puntos)

3.- Obtener la solución general de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2\cdot x}$ tanto por el método de coeficientes indeterminados como por el método de variación de parámetros. (4.5 puntos)

Solución: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x\, e^{2x} + e^{2x}\left(\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2}\right)$

4.- Sabiendo que $y_1 = x + 1$ es una solución de la ecuación diferencial

$$(1 - 2x - x^2) \cdot y'' + 2(1+x) \cdot y' - 2y = 0$$

resolver el problema de valor inicial $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$. (2.75 puntos)

Solución: $y = -x^2 + 2x + 1$

5.- Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} y' = z^2 - x^3 \\ z' = y^3 + \cos(x) \end{cases} \quad x \in [0,1] \qquad \text{con } y(0) = 0,\ z(0) = 1$$

aplicar **un paso** del método de Runge-Kutta de orden cuatro para obtener una aproximación de los valores y(0.2) y z(0.2). Operar con redondeo a 5 dígitos significativos. (3.5 puntos)

Solución: $y(0.2) \simeq 0.24216 \quad z(0.2) \simeq 1.1993$

GRADO EN INGENIERÍA EN ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL - 2017-1018
AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALESY MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen parcial - 17 de noviembre de 2017

NOTA: Sólo podrá utilizarse la calculadora en el ejercicio 3.

EJERCICIO 1
Calcular en forma binómica, y representar gráficamente, todos los $z \in \mathbb{C}$ para los cuales

$$z^3 + \frac{54 \cdot i^{123456}}{\left(1 - e^{\frac{3\pi i}{2}}\right)^2} = 0.$$

2.25 puntos

EJERCICIO 2
Sea $p \in [a, b]$ un punto fijo de la función $g \in C^1([a, b])$ tal que $|g'(p)| < 1$. Suponer que para un cierto x_0 la sucesión de punto fijo asociada a g converge a p. Demostrar que dicha convergencia es lineal.

1.5 puntos

EJERCICIO 3
Operar con 6 dígitos significativos en este ejercicio. Considerar la siguiente ecuación:

$$e^{1-x} - 1 - (x-2)^3 = 0$$

Se pide:

i. Sin utilizar para nada la calculadora, y utilizando métodos gráficos, encontrar un intervalo de longitud 1 que contenga la mayor raíz de la ecuación. **1 punto**

ii. Efectuar dos iteraciones del método de falsa posición para conseguir un nuevo intervalo que siga conteniendo a la raíz. **1.5 puntos**

iii. Aplicando un método de punto fijo con convergencia cuadrática, calcular una aproximación de dicha raíz deteniendo el algoritmo al conseguir una precisión del $0.05\,\%$. Justificar que se cumplen las condiciones para la convergencia antes de efectuar las iteraciones. **2 puntos**

iv. ¿Qué orden de convergencia tendría, para calcular esta raíz, el método de la secante? Justificar la respuesta. **0.5 puntos**

EJERCICIO 4
Sea $a \in \mathbb{R}$. Considerar el siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y' - 2ty = e^{t^2} + \dfrac{a}{(t+1)y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Se pide:

i. Decir si las siguientes afirmaciones sobre dicho problema de valor inicial son ciertas o falsas, justificando brevemente las respuestas.

   (a) Para $a = 0$, existe una solución única y continua para todo $\mathbb{R}$. **0.25 puntos**

   (b) Para $a = 0$, existe solución única, pero sólo podemos asegurar que sea continua en un intervalo de la forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$. **0.25 puntos**

   (c) Para $a \neq 0$, existe solución única, pero sólo podemos asegurar que sea continua en un intervalo de la forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$. **0.5 puntos**

ii. Considerando ahora $a = 0$, encontrar la solución del problema de valor inicial anterior. **2.25 puntos**

EJERCICIO 5
Se pide:

i. Deducir, en términos de la transformada de Laplace de la función $f(t)$, la expresión de la transformada de Laplace de las funciones $f'(t)$ y $f''(t)$. **1.5 puntos**

ii. Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = \delta(t-2) \qquad \forall t \geq 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

1.75 puntos

iii. Siendo $y(t)$ la solución del apartado anterior, calcular:

- $\lim\limits_{t \to 1} y(t)$
- $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$
- $\displaystyle\int_0^\infty y(t) e^{-3t}\, dt$

0.75 puntos

TIEMPO: 1 hora y 45 minutos **PUNTUACIÓN TOTAL: 16 puntos**

SOLUCIONES

Ejercicio 1: $z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}$, $z_2 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}$, $z_3 = -3i$

Ejercicio 3: i) $p \in [1,2]$ **ii)** $[a_2, b_2] = [1, 1.43764]$ **iii)** $p \approx 1.33964$

Ejercicio 4: i) a) Verdadero **b)** Falso **c)** Verdadero

ii) $y(t) = (t+1)\cdot e^{t^2}$

Ejercicio 5: ii) $y(t) = -e^{2t} + H(t-2)\cdot e^{2(t-2)}\cdot(t-2) = \begin{cases} -e^{2t} & \text{si } t < 2 \\ e^{2t}(-1 + e^{-4}(t-2)) & \text{si } t > 2 \end{cases}$

iii) $-e^2, \quad \infty, \quad e^{-6} - 1$

AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE MÉTODOS NUMÉRICOS – Grado en Ing. en Organización Industrial
Primera Parte - 12 de Enero de 2018

Puntuación total: 17 puntos
Tiempo:1 hora y 45 minutos

Nota: Solo podrá utilizarse la calculadora en el ejercicio 2.

1.- A) Demostrar que si tenemos dos números complejos dados en forma polar $z_1 = (\rho_1)_{\theta_1}$ y $z_2 = (\rho_2)_{\theta_2}$, entonces $z_1 \cdot z_2 = \left(\rho_1\rho_2\right)_{\theta_1+\theta_2}$ (0.75 puntos)

B) Calcular en forma binómica las raíces del polinomio $p(z) = z^5 - 2z^4 + z^3 - 2z^2 + z - 2$. (1.75 puntos)

Solución: $z_1 = -1/2 + i\sqrt{3}/2,\ z_2 = -z_1, z_3 = -1/2 - i\sqrt{3}/2, z_4 = -z_3$

2.- A) Analizar cuántos dígitos significativos correctos perdemos al evaluar $f(x) = 1 - \cos(x)$ en x=0.05 si operamos con redondeo a 4 dígitos significativos. Proponer y aplicar una solución a este problema que permita evaluar f(0.05) de forma eficiente trabajando con 4 dígitos significativos. (1 punto)

B) Describir el paso n-ésimo del algoritmo de falsa posición, **deduciendo** además la fórmula que permite calcular el punto x_n de la sucesión obtenida. (1.75 puntos)

C) Dada la función $f(x) = x \cdot tg(x) - 1/2 \quad x \in \mathbb{R}$, se pide:

a) Localizar **todas** sus raíces en intervalos disjuntos. (1.5 puntos)

Solución: $p_k \in (k\pi, k\pi + \pi/2) \quad k \geq 0, \quad s_k \in (-k\pi - \pi/2, -k\pi) \quad k \geq 0$

b) Para la raíz perteneciente al intervalo (6.3,6.4) y trabajando con redondeo a 6 dígitos significativos, se pide:

i) Calcular dicha raíz mediante el método de Newton-Raphson tomando como aproximación inicial $x_0 = 6.3$. (1.5 puntos)

ii) Obtener dicha raíz con una precisión del 0.01% mediante el método de la secante, partiendo de los valores $x_0 = 6.3$ y $x_1 = 6.4$. (1.25 puntos)

Solución: $p \approx 6.36162$

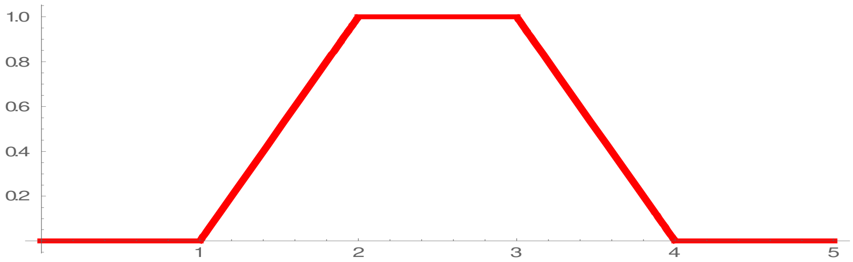
3.- A) Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$\left(\frac{Ln(Ln(y))}{x} + \frac{2}{3}x \cdot y^3 + 6x\right)dx + \left(\frac{Ln(x)}{y \cdot Ln(y)} + x^2 \cdot y^2 + 4e^{-2y}\right)dy = 0 \qquad \text{(2.25 puntos)}$$

Solución: $\varphi(x,y) = Ln(Ln(y)) \cdot Ln(x) + \frac{1}{y} \cdot x^2 \cdot y^3 + 3x^2 - 2 \cdot e^{-2y} = C$

B) Escribir la forma general de una ecuación de Bernoulli, explicar cómo se resuelve y demostrar que ese método funciona. (1.75 puntos)

4.- **a)** Calcular la transformada de Laplace de la función representada en la siguiente gráfica.



(1.75 puntos)

Solución: $\frac{1}{s^2}\left[e^{-s} - e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s}\right]$

b) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace.

$$\begin{cases} y'' - 7y' + 6y = 10\,\delta(t-2) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(1.75 puntos)

Solución: $2 \cdot H(t-2)\left[e^{6(t-2)} - e^{t-2}\right]$

AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE MÉTODOS NUMÉRICOS - Ing. en Organización Industrial
Segunda Parte - 12 de Enero de 2018

Puntuación total: 14 puntos
TIEMPO: 1 hora y 45 minutos

Nota: Solo podrá utilizarse la calculadora en el ejercicio 6.

1.- Describir en qué consiste el Método de Variación de parámetros para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Aclarar cuándo se puede aplicar y demostrar por qué funciona. (1.25 puntos)

2.- Una ecuación diferencial lineal no homogénea se transforma en el sistema

$$\underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} \cdot \underset{\sim}{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t\cdot e^t + t^2 \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Sabiendo que:

- **i)** El wronskiano de tres soluciones cualesquiera del sistema homogéneo asociado es siempre constante.
- **ii)** Una solución de la ecuación diferencial homogénea es e^t.

determinar la ecuación diferencial a la que representa el sistema. (2 puntos)

Solución: $y''' - y = t\cdot e^t + t^2$

3.- Considerar las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

a) $y^{iv)}(t) + y'(t) = e^{t/2}\,\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + e^t - t\cdot e^{-t} + 2\cdot e^{-t}$ (1.25 puntos)

Solución:

$$y = C_1 + C_2\cdot e^{\frac{1}{2}t}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3\cdot e^{\frac{1}{2}t}\cdot\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_4\cdot e^{-t} +$$
$$+ t\cdot e^{\frac{1}{2}t}\left[A_1\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + B_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right] + A_2\cdot e^t + t\left(A_3 + B_3 t\right)e^{-t}$$

b) $y^{iv)}(t) + y'(t) = t\left(\cos^2 t - \text{sen}^2 t\right)$ (0.5 puntos)

Solución:

$$y = C_1 + C_2\cdot e^{\frac{1}{2}t}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3\cdot e^{\frac{1}{2}t}\cdot\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_4\cdot e^{-t} +$$
$$+ \left(At + B\right)\cos(2t) + \left(Ct + D\right)\text{sen}(2t)$$

c) $y''(t) + y'(t) + y(t) = \dfrac{2}{\text{sen}(t)}$ (0.75 puntos)

Solución:

$$\boldsymbol{\Psi}(t)=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) & e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) & -\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{pmatrix}$$

En los casos que sea posible, plantear, sin resolver los coeficientes indeterminados, **la forma más sencilla posible** de su solución general. Para los casos en los que no sea posible dicho planteamiento, proporcionar una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado.

4.- Hallar la solución del sistema de ecuaciones:

$$\underset{\sim}{\mathbf{x}}'=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{x}} \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{\mathbf{x}}(0)=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y encontrar la matriz fundamental $\boldsymbol{\Phi}(t)$ que verifica que $\boldsymbol{\Phi}(0)=\mathbf{I}$. (2.75 puntos)

Solución: $\underset{\sim}{x}=e^{3t}\begin{pmatrix} 2t+3 \\ 2t+4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{pmatrix} (1-2t)e^{3t} & 2t\cdot e^{3t} \\ -2t\cdot e^{3t} & (1+2t)e^{3t} \end{pmatrix}$

5.- Indicar **razonadamente**, qué familia de curvas de entre las siguientes, representa la solución general de alguna ecuación diferencial lineal homogénea de orden tres y con coeficientes constantes. Escribir la ecuación diferencial en los casos en que sea posible:

i) $y(x)=A\cdot x\cdot e^{x}+B+C\cdot x$ (0.5 puntos)

ii) $y(x)=A\cdot e^{x}+B\cdot x\cdot e^{x}+C$ (0.75 puntos)

Solución: ii) $y'''-2y''+y'=0$

6.- Dado problema de valor inicial

$$y''=-\frac{1}{4t\cdot y} \qquad y(1)=1, y'(1)=0.5,$$

a) hallar una aproximación de y(2) e y'(2) aplicando el método de Heun o Euler mejorado tomando un tamaño de paso h=0.5. Operar con 6 dígitos significativos. (2.25 puntos)

Solución: $\begin{array}{l} u_{1,2}=1.40374\approx u_1(2)=y(2)=\sqrt{2} \\ u_{2,2}=0.347985\approx u_2(2)=y'(2) \end{array}$

b) Comprobar que $y(t)=\sqrt{t}$ es una solución del problema de valor inicial del apartado anterior e interpretar el resultado obtenido en el apartado a). (0.5 puntos)

7.- **a)** Definir error de truncatura e_{j+1} y error de truncatura local d_{j+1} en el punto x_{j+1}.
¿Cómo se relacionan estas dos cantidades? (1 punto)

b) Definir y explicar qué significa que un método numérico sea de orden p.
(0.5 puntos)

GRADO EN INGENIERÍA EN ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL - 2017-1018
AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALESY MÉTODOS NUMÉRICOS
Convocatoria extraordinaria - 30 de junio de 2018

TIEMPO: 2 horas y 45 minutos **PUNTUACIÓN TOTAL: 20 puntos**

NOTA: Sólo podrá utilizarse la calculadora en los ejercicios 2 y 8.

EJERCICIO 1

Se pide:

1. Escribir en forma binómica y exponencial el número complejo $z = [(1-a)i]^{111}$, según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Representarlo gráficamente en el plano. **1 punto**
2. Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Sabiendo que una solución de la ecuación $a \cdot z^4 + b = 0$ es $5 - 2i$, obtener en forma binómica, de la forma más sencilla posible, las demás soluciones, y representarlas gráficamente en el plano. **1 punto**

EJERCICIO 2

Considerar la ecuación

$$x \log x - \log\left(x^2\right) = 1.$$

Se pide:

a) Utilizando métodos gráficos, localizar todas las raíces de la ecuación en intervalos de extremos enteros consecutivos. **1 punto**

b) Sea p la raíz de menor valor absoluto, y sea $[a, b]$ el intervalo que contiene a p obtenido en el apartado anterior. Sin ejecutar el método de bisección, estimar cuántas iteraciones de dicho método serían necesarias para obtener un nuevo intervalo que contenga a p y cuya longitud sea menor o igual que $\epsilon = 10^{-2}$. ¿Y si $\epsilon = 10^{-n}$ con $n \in \mathbb{N}$? **1 punto**

c) Utilizando el dato adicional de que el punto medio de $[a, b]$ es una buena aproximación de la raíz p, calcular dicha raíz mediante un método de punto fijo linealmente convergente. Analizar la velocidad de convergencia, así como la forma en que los términos de la sucesión se aproximan a la raíz antes de efectuar las iteraciones. Detener el algoritmo al obtener una precisión del $0.05\,\%$, y utilizar 6 dígitos significativos. **1.75 puntos**

EJERCICIO 3

Discutir si la ecuación diferencial

$$\left[y + x\cos^2(y/x)\right] \cdot dx - x \cdot dy = 0$$

tiene una única solución cuya gráfica pasa por el punto del plano $(1, \pi/4)$. Hallar, en caso de existir, dicha solución, explicitando su dominio máximo de definición. **2.5 puntos**

EJERCICIO 4

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones con condiciones iniciales utilizando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x'(t) = 1 + y(t) \\ y'(t) = 1 - x(t) \end{cases} \quad \forall t \geq 0, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

1.5 puntos

EJERCICIO 5
Considerar la EDO de orden superior:

$$y^{iv)}(t) - y'''(t) = 3t^2.$$

Se pide:

i. Hallar la solución general de la EDO anterior por el método más adecuado. **1.5 puntos**

ii. Transformar la EDO anterior en un sistema equivalente de la forma $x' = A \cdot x + q$ y hallar una matriz fundamental de su sistema homogéneo asociado a partir de la respuesta al apartado i.

0.75 puntos

iii. Razonando la respuesta y sin realizar cálculos, indicar qué dimensiones tienen los espacios $V_m(\lambda) = \ker(A - \lambda I)^m$ para $m = 1, 2, 3$ y 4, en los casos $\lambda = 0$ y $\lambda = 1$. Hallar el vector solución del sistema completo cuyas coordenadas son todas iguales a 1 en $t = 0$. **1.5 puntos**

EJERCICIO 6
Considerar la siguiente EDO:

$$xy''(x) + 2y'(x) - \frac{3}{4x}y(x) = 0 \quad \forall x > 0$$

Se pide:

i. Hallar su solución general, sabiendo que existen dos soluciones cuyo cociente es x^2.

1.5 puntos

ii. Hallar la solución general de

$$xy''(x) + 2y'(x) - \frac{3}{4x}y(x) = x \quad \forall x > 0$$

2 puntos

EJERCICIO 7
Transformar el siguiente sistema de ecuaciones de manera que se pueda resolver mediante técnicas matriciales

$$\begin{cases} u'''(t) = v(t) + 2u'(t) + t \\ v'(t) = t \cdot u(t) + t^2 \end{cases}$$

1 punto

EJERCICIO 8
Ejecutar dos pasos de tamaño 0.1 del método de Euler mejorado o Heun para resolver de forma aproximada el siguiente problema de valor inicial:

$$y''(t) + 3t \cdot y(t) = 1, \quad y(1) = y'(1) = 0$$

2 puntos

SOLUCIONES

Ejercicio1: 1) $\begin{cases} -(1-a)^{111} i = (1-a)^{111} e^{-i\pi/2} & \text{si } a<1 \\ (a-1)^{111} i = (a-1)^{111} e^{i\pi/2} & \text{si } a>1 \end{cases}$

2) $z_1 = 5-2i, z_2 = 2+5i, z_3 = -5+2i, z_4 = -2-5i$

Ejercicio2: a) $p_1 \in (0,1), p_2 \in (2,3)$ **b)** n=6, $n > \dfrac{m \cdot Ln(10)}{Ln(2)} - 1$ **c)** $p \approx x_4 = 0.510884$

Ejercicio 3: $y = x \cdot \text{arctg}(Ln(x)+1) \quad \forall x > 0$

Ejercicio 4: x(t) = 1, y(t)= - 1

Ejercicio 5: i) $y(t) = C_1 + C_2 \cdot t + C_3 \cdot t^2 + C_4 \cdot e^t - t^3 - \dfrac{1}{4} t^4 - \dfrac{1}{20} t^5$

ii) $\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2 & e^t \\ 0 & 1 & 2t & e^t \\ 0 & 0 & 2 & e^t \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$

iii) $\dim(V_1(1)) = \dim(V_2(1)) = \dim(V_3(1)) = \dim(V_4(1)) = 1$

$\dim(V_1(0)) = 1, \dim(V_2(0)) = 2, \dim(V_3(0)) = 3 = \dim(V_4(0))$

$$\underset{\sim}{u} = \begin{pmatrix} -6-6t+2t^2+7e^t - t^3 - \dfrac{1}{4}t^4 - \dfrac{1}{20}t^5 \\ -6+4t+7e^t - 3t^2 - t^3 - \dfrac{1}{4}t^4 \\ 4+7e^t - 6t - 3t^2 - t^3 \\ 7e^t - 6 - 6t - 3t^2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6: i) $y = C_1 \cdot x^{-3/2} + C_2 \cdot x^{1/2}$ **ii)** $y = C_1 \cdot x^{-3/2} + C_2 \cdot x^{1/2} + \dfrac{4}{21} x^2$

Ejercicio 8: $u_{1,2} = 0.0199175 \simeq u_1(1.2) = y(1.2)$

$u_{2,2} = 0.196475 \simeq u_2(1.2) = y'(1.2)$

AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE MÉTODOS NUMÉRICOS - Ing. De Organización Industrial
Examen Parcial - 16 de Noviembre de 2018

TIEMPO: 1 hora y 45 minutos **Puntuación total: 18 puntos**

1.- **a)** Expresar el número complejo $z=\left(\dfrac{7+i}{3+4i}\right)^{43}$ en forma binómica. (1.25 puntos)

b) Demostrar que si $z_1=(\rho_1)_{\theta_1}$ y $z_2=(\rho_2)_{\theta_2}$ con z_2 no nulo, entonces $\dfrac{z_1}{z_2}=\left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)_{\theta_1-\theta_2}$.

(1 punto)

Solución: a) $-2^{21}(1+i)$

2.- Dada la función $f(x) = e^{-x^2}-\cos(x)$, operando siempre con **redondeo a 6 dígitos significativos**, se pide:

a) Obtener **gráficamente todas** sus raíces en intervalos disjuntos. (1.5 puntos)

b) Sabiendo que una de sus raíces está en el intervalo [1, 1.5], aplicar una iteración del método de falsa posición para obtener un nuevo intervalo que contenga a dicha raíz. (0.75 puntos)

c) Considerando un método iterativo de punto fijo con convergencia lineal de primer orden y tomando como aproximación inicial el valor obtenido mediante el método de falsa posición en el apartado anterior, calcular dicha raíz con una precisión de $\varepsilon=3x10^{-3}$. (1.75 puntos)

d) Considerando como aproximaciones iniciales los extremos del intervalo obtenido en el apartado b), calcular dicha raíz con una precisión del 0.1% mediante el método de la secante. (1.25 puntos)

Solución: a)

$$\text{Positivas}:\ p_1\in(0,\pi/2),\ \begin{cases} p_k\in(k\pi-\pi/2,k\pi) \\ p_{k+1}\in(k\pi,k\pi+\pi/2)\end{cases}\ k\geq 2,\ k\ \text{par.}$$

$$\text{Negativas}:\ s_1\in(-\pi/2,0),\ \begin{cases} s_k\in(-k\pi,-k\pi+\pi/2) \\ s_{k+1}\in(-k\pi-\pi/2,-k\pi)\end{cases}\ k\geq 2,\ k\ \text{par}$$

b) $p\in[1.41631,1.5]$

c) Con $g_1(x)=\arccos(e^{-x^2})$ $p\approx x_3=1.44590$.
Con $g_2(x)=x-e^{-x^2}+\cos(x)$ $p\approx x_3=1.44582$.

d) $p\approx x_3=1.44737$

3.- Analizar la interpretación geométrica de los métodos de Newton-Raphson y la secante, deduciendo la fórmula iterativa a partir de las gráficas. (1.75 puntos)

4.- **a)** ¿Es posible garantizar, sin resolver la ecuación diferencial $(x^3\cdot y+y^4)dx-x^4dy=0$, que existe una única solución que pasa por el punto (0,- 4)? ¿Y por el (1, 1)? (1 punto)

b) ¿Es posible resolver la ecuación diferencial anterior de varias maneras distintas? Justificar brevemente la respuesta. (1 punto)

c) Resolver el problema de valor inicial $\begin{cases}(x^3 \cdot y + y^4)dx - x^4 dy = 0 \\ y(1) = 1\end{cases}$**,** indicando dónde es válida la solución obtenida. (2.5 puntos)

Solución: a) Para (0,-4) no y para (1,1) sí**. b)** Como Bernoulli con p=4 y como homogénea

c) $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^3}{1-3*Ln(x)}}$ continua si $x \neq e^{1/3} \Rightarrow$ solución válida en $(0, e^{1/3})$.

5.- Resolver el problema de valor inicial $y'' + y = t - (t-4) \cdot H(t-2)$ con $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ usando la transformada de Laplace. ¿Cuánto valen y(1) e y(3)? (4.25 puntos)

Solución:

$$y(t) = t + H(t-2)\left(4 - t - 2\cos(t-2) + \mathrm{sen}(t-2)\right) = \begin{cases} t & \text{si } t < 2 \\ 4 - 2\cos(t-2) + \mathrm{sen}(t-2) & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

$y(1) = 1; y(3) = 4 - 2\cos(1) + \mathrm{sen}(1)$

GRADO EN INGENIERÍA EN ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL - 2018-2019
AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALESY DE MÉTODOS NUMÉRICOS
Convocatoria ordinaria - 18 de enero de 2019

Primera Parte (temas 1-4)

Nota: Tan solo se podrá utilizar la calculadora en el Ejercicio 3.

EJERCICIO 1

(a) Calcular y expresar en forma exponencial todos los ceros del polinomio **1.25 puntos**

$$p(z) = z^5 + (2i - 2) \cdot z^2$$

(b) Representar gráficamente los ceros de $p(z)$ y expresarlos en forma binómica, en función de $a = \sin 15^\circ$ y $b = \cos 15^\circ$. **1.5 puntos**

EJERCICIO 2

Demostrar que el método de bisección converge siempre, y que sin embargo, x_n puede ser una aproximación a la solución p mejor que x_{n+1}. Justificar esta última afirmación mediante un gráfico.

1.25 puntos

EJERCICIO 3

Operar con 6 dígitos significativos en este ejercicio. Considerar la siguiente ecuación:

$$L|x - 2| = \sin x$$

Se pide:

i. Sin utilizar para nada la calculadora, y utilizando métodos gráficos, encontrar un intervalo de longitud 1 que contenga la menor raíz de la ecuación (p_1) y un intervalo de longitud menor que 0.2 que contenga la mayor de ellas (p_2). Justificar a partir de la gráfica por qué solo hay dos raíces. **1.25 puntos**

ii. Aplicando el método de falsa posición, calcular una aproximación de la raíz p_1 deteniendo el algoritmo al conseguir una precisión del $0.25\,\%$. **1.5 puntos**

iii. Hallar una fórmula iterativa (usando una función de punto fijo) que convergería a p_1 con convergencia lineal a partir de la aproximación obtenida en el apartado anterior. Justificar dicha convergencia (NOTA: no calcular iteraciones). Analizar la velocidad de convergencia y la distribución de las aproximaciones sucesivas que se obtendrían. **1.75 puntos**

iv. Calcular p_2 utilizando el método de Newton-Raphson. Justificar la convergencia del método para el cálculo de esa raíz. **1 punto**

EJERCICIO 4

Considerar la EDO de primer orden:

$$(y \sin x + 2xy^2)\, dy + (y^3 + y^2 \cos x)\, dx = 0$$

i. Razonar si se puede asegurar, sin resolver la ecuación, que exista una única solución de esa EDA que cumpla $y(0) = 2$. **1 punto**

ii. Encontrar un parámetro a de manera que al multiplicar la ecuación anterior por y^a se obtenga una ecuación exacta. **1.25 puntos**

iii. Resolver la ecuación exacta obtenida en el apartado anterior y responder ahora a la pregunta del primer apartado. **2.5 puntos**

EJERCICIO 5
Se pide:

i. Sea $F = \mathscr{L}\{f\}$, y considerar la función g definida por $g(t) = H(t-a)f(t-a)$, siendo $a > 0$. Enunciar y demostrar la propiedad que permite calcular $\mathscr{L}\{g\}$ en función de F. **1.25 puntos**

ii. Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$\begin{cases} x'(t) + 2y(t) = e^t + 2t \\ y'(t) + x(t) = e^t + 1 \\ x(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

2.5 puntos

TIEMPO: 1 hora y 45 minutos **PUNTUACIÓN TOTAL: 18 puntos**

GRADO EN INGENIERÍA EN ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL - 2018-2019
AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALESY DE MÉTODOS NUMÉRICOS
Convocatoria ordinaria - 18 de enero de 2019

Segunda Parte (temas 5 y 6)

Nota: Tan solo se podrá utilizar la calculadora en el Ejercicio 5.

EJERCICIO 1
Se sabe que

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{2x} + C_4 x e^{2x}, \quad C_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3,4$$

es la solución general de una EDO lineal de coeficientes constantes $L[y] = 0$.

a) ¿Cuál es el orden de la EDO? Justificar brevemente la respuesta. **0.25 puntos**

b) Sea A la matriz de coeficientes constantes asociada al sistema. ¿Cuáles son sus autovalores? ¿Qué multiplicidad tienen? **0.25 puntos**

c) Escribir una base de $V(r) = \ker(A - rI)$ para cada autovalor r del apartado anterior. **0.75 puntos**

d) Considerar ahora la EDO $L[y] = q(x)$. Para cada uno de los siguientes casos en los que sea posible, plantear, sin resolver los coeficientes indeterminados, la forma de una solución de $L[y] = q(x)$ según el *Método de los Coeficientes Indeterminados*. **2.5 puntos**

(i) $q(x) = \sin x \cdot \cos(\sqrt{2}x)$

(ii) $q(x) = e^{x^2}$

(iii) $q(x) = 1 + \sqrt{x}$

(iv) $q(x) = xe^{x-1} + xe^{-x}\sin(2x)$

EJERCICIO 2
Hallar la solución general de

$$(x+1)y''(x) + (1-x)y'(x) + a(x)y(x) = 0$$

sabiendo que hay dos soluciones cuyo cociente es e^x. **1.75 puntos**

EJERCICIO 3
Hallar la solución general del siguiente sistema de ecuaciones utilizando la técnica matricial.

$$\begin{cases} y'' = y - y' - z \\ z' = y - z \end{cases}$$

3 puntos

EJERCICIO 4

(a) Describir brevemente en qué consiste el *Método de Variación de Parámetros* para resolver un sistema no homogéneo de EDOS lineales, **demostrando** por qué funciona. **1.25 puntos**

(b) Se sabe que $y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2, \quad C_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3$ es la solución general de una EDO lineal de coeficientes constantes cuya forma normal es $L[y] = 0$. Hallar la solución de $L[y] = \sqrt{x}$ que cumple $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$. **2.5 puntos**

EJERCICIO 5

(a) **Demostrar** que el método de Runge-Kutta de orden 4 es consistente. Señalar cuál es la principal implicación del hecho de que sea consistente. **1 punto**

(b) Se quiere aplicar el método de Runge-Kutta de orden 4 para resolver el problema de valor inicial siguiente en el intervalo $[1\ ,\ 2]$ en 5 pasos. Utilizando 6 dígitos significativos, ejecutar tan solo el primero. ¿Qué aproximación o aproximaciones se obtienen tras ejecutar ese paso?

$$t \cdot y''(t) + \cdot y(t) = t, \quad y(1) = y'(1) = 0$$

2.75 puntos

TIEMPO: 1 hora y 45 minutos **PUNTUACIÓN TOTAL: 16 puntos**

Soluciones:

PRIMERA PARTE:

Ejercicio 1: a) $z_1 = \sqrt{2}\ e^{-\frac{\pi}{12}i}, \quad z_2 = \sqrt{2}\ e^{\frac{7\pi}{12}i}, \quad z_3 = \sqrt{2}\ e^{\frac{15\pi}{12}i}$

b) $z_1 = \sqrt{2}\,(b - ai), \ \ z_2 = \sqrt{2}\,(-a + bi), \ \ z_3 = -(1+i)$

Ejercicio 3: a) $p_1 \in [0,1], \ \ p_2 \in [3,\pi]$ **b)** $p \in [0.451674, 0.452131]$

d) $p \approx x_3 = x_2 = 3.07201$

Ejercicio 4: a) No se puede **b)** a= - 1 **c)** $\varphi(x,y) = y^2 x + y\,\mathrm{sen}(x) = C$ no pasa por (0,2)

Ejercicio 5: b) $x(t) = e^t, \quad y(t) = t$

SEGUNDA PARTE:

Ejercicio 1: a) orden 4 **b)** $\begin{cases} r = 1 \ \text{con} \ m = 2 \\ r = 2 \ \text{con} \ m = 2 \end{cases}$ **c)**

$V(1) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}, \quad V(2) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\4\\8\end{pmatrix}\right\}$ **d) i)**

$$y_p = A_0\mathrm{sen}(x(1+\sqrt{2})) + B_0\cos(x(1+\sqrt{2})) + A_1\mathrm{sen}(x(1-\sqrt{2})) + B_1\cos(x(1-\sqrt{2}))$$

ii) No es posible **iii)** No es posible

iv) $y_p = e^x(Ax+B)x^2 + e^{-x}\left[(A_1x + B_1)\mathrm{sen}(2x) + (A_2x + B_2)\cos(2x)\right]$

Ejercicio 2: $y(x) = C_1\dfrac{1}{1+x} + C_2\dfrac{e^x}{1+x}$

Ejercicio 3: $\begin{pmatrix}y\\z\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}t+1\\t\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Ejercicio 4: $y = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{15}x^{7/2}$

Ejercicio 5: $\underset{\sim}{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix}0.0199394\\0.198838\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}y(0.2)\\y'(0.2)\end{pmatrix}$

GRADO EN INGENIERÍA EN ORGANIZACIÓN INDUSTRIAL - 2019-2020
AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALESY MÉTODOS NUMÉRICOS
Examen parcial escrito - 15 de noviembre de 2019

TIEMPO: 1 hora y 45 minutos **PUNTUACIÓN TOTAL: 19 puntos**

NOTA: *Tan solo podrá usarse la calculadora en el ejercicio 2.*

EJERCICIO 1

(a) Escribir en forma polar y binómica $w = \dfrac{(1+i^{2019})^2}{i+\sqrt{3}}$. **1.5 puntos**

(b) Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que cumplen $z^3 + 8w = 0$ y representarlos gráficamente. **1.5 puntos**

EJERCICIO 2
Considerar la función dada por $f(x) = \tan x + x^2 - 6$. Trabajando con 6 dígitos significativos, se pide:

(a) Analizar gráficamente cuántas raíces tiene en el intervalo $[0, 10]$. Dar, **para la primera raíz positiva** p, un intervalo de longitud 0.5 donde se cumplan las condiciones para aplicar el método de bisección. **1.5 puntos**

(b) Aplicar el método de bisección a dicho intervalo para obtener otro de longitud menor que 0.1 y que siga conteniendo a p. **1 punto**

(c) Calcular de forma aproximada la raíz p mediante un método de punto fijo de convergencia lineal. Comprobar y analizar la convergencia y velocidad del método antes de aplicarlo. Detener el algoritmo al conseguir una diferencia menor que $0.1\,\%$ entre dos aproximaciones consecutivas. Describir cómo se distribuyen las aproximaciones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ alrededor de su límite p y **demostrar** gráficamente por qué sucede eso. **3.5 puntos**

EJERCICIO 3
Explicar brevemente qué tienen en común los métodos de la secante y de falsa posición (o *regula falsi*). Mostrar con un dibujo que ambos métodos pueden dar lugar a aproximaciones diferentes. **2 puntos**

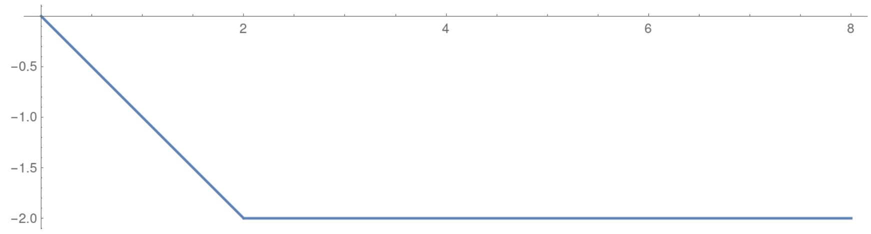
EJERCICIO 4
Considerar el problema de valor inicial dado por $y' = y + ty^3$ y la condición inicial $y(0) = -1$.

(a) ¿Podemos asegurar que dicho problema tiene solución única continua en el intervalo $[0, \infty)$? Razonar la respuesta sin resolver la EDO. **1 punto**

(b) Hallar de forma explícita la solución al problema de valor inicial dado y decir dónde es continua. **3.5 puntos**

EJERCICIO 5

(a) Expresar, usando la función de Heaviside, la función f representada en la siguiente gráfica. Calcular su transformada de Laplace $\mathscr{L}\{f\}$. **1 punto**



(b) Resolver el siguiente problema de valor inicial utilizando la transformada de Laplace:

$$y''(t) + y(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Calcular y simplificar el valor de la solución en el punto $t = \pi/2$. **2.5 puntos**

Soluciones:

Ejercicio 1: a) $w=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $2_{\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}}$ $k=0,1,2$

Ejercicio 2:

a) $p_1\in(0,\pi/2),\ p_2\in(\pi/2,\pi),p_3\in(3\pi/2,2\pi),p_4\in(5\pi/2,3\pi)$ y $p_1\in[1,1.5]$

b) $p\in[1.3125,1.375]=[a_3,b_3]$

c) $p\approx x_2=1.33775$ con $x_0=\frac{a_3+b_3}{2}$ $g(x)=\operatorname{arctg}(6-x^2)$

Ejercicio 4: a) No podemos

b) $y=-\sqrt{\frac{1}{-t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}}}$ continua $\Leftrightarrow -t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-2t}>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{-2t}>-1+2t\Leftrightarrow t\in(-\infty,p)$ con p algo mayor que $1/2$

Ejercicio 5: a) $\mathcal{L}\{f(t)\}=-\frac{1}{s^2}+e^{-2s}\cdot\frac{1}{s^2}$

b) $y(t)=-t+\cos(t)+\operatorname{sen}(t)+(t-2)\cdot H(t-2)-\operatorname{sen}(t-2)\cdot H(t-2)$

$y(\pi/2)=-\pi/2+1$

AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE MÉTODOS NUMÉRICOS - Ing. De Organización Industrial
Primera Parte - 16 de Enero de 2020

Tiempo: 1 hora y 45 minutos **Puntuación total: 17 puntos**
NOTA: Tan solo podrá usarse la calculadora en el ejercicio 2.

1.- Calcular las raíces del polinomio $z^4+(4-2i)z^2-8i$. (2.25 puntos)

Solución: $z_1=1+i,\ z_2=-1-i,\ z_3=2i,\ z_4=-2i$

2.- Dada la función $f(x)=e^{-(x-1)^2}-x^2+1$ y operando con redondeo a **6 dígitos significativos**:

a) Localizar gráficamente sus raíces en intervalos de **amplitud 0.5 unidades**. (1.5 puntos)

Solución: $p_1\in(-1.5,-1),\quad p_2\in(1,1.5)$

b) Contando con que la convergencia va a ser cuadrática, explicar por qué para la raíz más **pequeña** puede utilizarse el punto $x_0=-1$ como valor inicial para aplicar el método de Newton Raphson**.** Calcular dicha raíz mediante el método de Newton-Raphson. (1.5 puntos)

Solución: $p\simeq x_3=x_2=-1.00880$ (si $x_0=-1$)

c) Para la raíz más **grande** reducir el intervalo obtenido en el apartado a) a uno de amplitud menor que una décima mediante el método de bisección (1 punto)

Solución: $p\in[1.3125,1.375]$

d) Calcular la raíz del apartado c) con una precisión del 0.5% mediante un método iterativo de punto fijo con convergencia lineal de orden 1 ¿Qué se puede decir sobre la velocidad de convergencia del método utilizado? ¿Será la raíz mayor o menor que la aproximación obtenida? **Razonar las respuestas.** (2.75 puntos)

Solución: $p\simeq 1.36926>p$ (si $x_0=1.3125$)

3.- **a)** ¿En qué puntos nos garantiza el teorema de Picard la existencia de solución única para la ecuación $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{2}\tan(x)\cdot y=-x\cdot \text{sen}(x)\cdot y^3$? (1 punto)

Solución: (x_0,y_0) con $x_0\neq\dfrac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$

b) Hallar, en forma explícita, la solución del problema de valor inicial $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{2}\tan(x)\cdot y=-x\cdot \text{sen}(x)\cdot y^3\\ y(0)=-1/2\end{cases}$. (3 puntos)

Solución: $y = \sqrt{\dfrac{\cos(x)}{-\dfrac{x}{2}\cdot\cos(2x)+\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+4}}$

4.- a) Deducir $\mathcal{L}\{y'\}$ y $\mathcal{L}\{y''\}$ en función de $\mathcal{L}\{y\}$. (1.5 puntos)

b) Resolver el siguiente problema de valor inicial usando la transformada de Laplace

$$3y''(t)+48y(t)=f(t) \qquad y(0)=0,\ y'(0)=0 \qquad \text{con} \qquad f(t)=\begin{cases}\cos(4t) & \text{si } \ 0\le t<4\pi\\ 0 & \text{si } \ t\ge 4\pi\end{cases}$$

dando la solución **como una función a trozos lo más simplificada posible**.

(2.5 puntos)

$$y(t)=\frac{t\cdot\operatorname{sen}(4t)}{24}-\frac{1}{24}\cdot H(t-4\pi)\cdot(t-4\pi)\cdot\operatorname{sen}(4t)=$$

Solución:

$$=\begin{cases}\dfrac{t\cdot\operatorname{sen}(4t)}{24} & \text{si } \ t<4\pi\\[2ex] \dfrac{\pi\cdot\operatorname{sen}(4t)}{6} & \text{si } \ t\ge 4\pi\end{cases}$$

AMPLIACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES Y DE MÉTODOS NUMÉRICOS - Ing. De Organización Industrial

Segunda Parte - 16 de Enero de 2020

Tiempo: 1 hora y 45 minutos **Puntuación total: 18 puntos**

NOTA: Tan solo podrá usarse la calculadora en el ejercicio 6.

1.- a) Sea $\underset{\sim}{\mathbf{u}}' = \mathbf{P}\cdot\underset{\sim}{\mathbf{u}}$ un sistema lineal homogéneo de m ecuaciones, siendo la matriz $\mathbf{P}$ continua en un intervalo (a,b) y sean $\underset{\sim}{\mathbf{u}}_1(t),\underset{\sim}{\mathbf{u}}_2(t),...,\underset{\sim}{\mathbf{u}}_m(t)$ m soluciones de dicho sistema. **Demostrar** que $\underset{\sim}{\mathbf{u}}_1(t),\underset{\sim}{\mathbf{u}}_2(t),...,\underset{\sim}{\mathbf{u}}_m(t)$ son linealmente independientes en (a,b) si y solo si su wronskiano es distinto de cero en (a,b). (0.5 puntos)

b) Demostrar que el wronskiano de m soluciones del sistema del apartado anterior es o siempre nulo o siempre distinto de cero $\forall t\in(a,b)$. (0.75 puntos)

c) Dada la ecuación diferencial ordinaria $x\cdot y''' + y'' + (x-2)y' + 3y = 0$ ¿ Es posible encontrar 3 soluciones linealmente independientes que tengan tangentes horizontales en el punto x=1? Razonar la respuesta. (0.75 puntos)

2.- Obtener la solución del problema de valor inicial

$$\underset{\sim}{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\underset{\sim}{x} + \begin{pmatrix} 6t \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix} \text{ con } \underset{\sim}{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (3.75 puntos)

<u>Solución</u>: $$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} 3t^2 + 2\cdot e^{2t} + 4t\cdot e^{2t} \\ e^{2t}(2t^2+4t+2) \\ e^{2t}(t+1) \end{pmatrix}$$

3.- Dada la matriz $\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & (1-2t)e^{3t} \\ e^{3t} & -2te^{3t} \end{pmatrix}$**,** encontrar un sistema de la forma $\mathbf{x}' = A\cdot\mathbf{x}$ con A una matriz constante, para el que $\mathbf{\Psi}(t)$ es matriz fundamental. (2.5 puntos)

<u>Solución</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

4.- Hallar la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' - y = t\cdot e^t$$

usando el método de coeficientes indeterminados. (3.25 puntos)

<u>Solución</u>:

$$y = C_1\cdot e^t + C_2\cdot e^{-t/2}\cdot\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3\cdot e^{-t/2}\cdot\text{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \left(\frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{3}t\right)e^t$$

5.- Encontrar una ecuación diferencial lineal no homogénea cuya solución es

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x \cdot e^{2x} + \frac{1}{x} e^{2x}$$ (2.25 puntos)

Solución: $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \dfrac{2}{x^3}$

6.- a) Explicar brevemente qué significa en relación al error de truncatura e_j con $e_j = y(x_j) - y_j$, que un método numérico que resuelve el problema de valor inicial $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ sea de orden p. (1 punto)

b) Dada el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x' = x + y^2 - t^3 \\ y' = y + x^3 + \cos(t) \end{cases} \quad \text{con} \quad x(1) = 3, y(1) = 1$$

aplicar un paso del método de Runge-Kutta de orden cuatro para estimar x(1.1) e y(1.1). Operar con redondeo a **6 dígitos significativos**. (3.25 puntos)

Solución: $\underset{\sim}{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{1,1} \\ u_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.13173 \\ 5.15308 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} u_1(x_1) \\ u_2(x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1.1) \\ y(1.1) \end{pmatrix}$