Advanced Numerical Methods – 7/03/2013 EXAM RESOLUTION

N.B. The following is a scan of the original resolution written by hand in Spanish. The answers should mostly correspond to the actual exam, except for a few minor last-minute changes made to it.

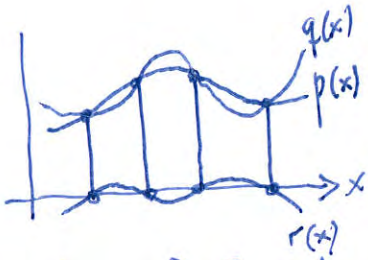
Nota: Lo que sigue es un escaneo de la resolución original escrita a mano en español. Las respuestas deberían corresponderse en su gran mayoría con las preguntas realmente hechas en el examen, excepto por algunos pequeños cambios de última hora hechos a éste.

AMN, Ejercicio 1 (Julio 2013)

A) La <u>existencia</u> la demuestro por construcción:

$$p_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1) +$$
$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

donde se ve que es un polinomio de grado ≤ 3 (pues es combinación lineal de cuatro polinomios de grado 3) y que además pasa por los nodos (por simple sustitución).



La <u>unicidad</u> la demuestro por reducción al absurdo. Sean p y q dos polinomios de grado ≤ 3 que pasan por los nodos, y sea $r(x) = p(x) - q(x)$ su diferencia. $r(x)$ debe ser de grado ≤ 3 y anularse en los 4 nodos (ver figura). Por el Teorema Fundamental del Álgebra, el único polinomio de grado ≤ 3 con más de 3 raíces es el idénticamente nulo $\Rightarrow p \equiv q$ c.q.d.

B)

x_i	f_i	$f_{i,1}$	$f_{i,2}$	$f_{i,3}$			
0	1						
1	4	3					
1	4	−2	−5				
1	4	−2	−3	2			
2	1	−3	−1	2	0		
3	4	3	3	2	0	0	
3	4	10	7	2	0	0	0

He calculado todo de la forma habitual salvo cuando ésta daba $\frac{0}{0}$, en cuyo caso he usado las derivadas proporcionadas. Concretamente, $f_{2,1} = f_{3,1} = -2 = p'(1)$; $f_{6,1} = 10 = p'(3)$; $f_{3,2} = -3 = p''(1)/2!$ (números marcados con un círculo).

Ésta se llama una <u>tabla de diferencias divididas con repeticiones</u>.

No se puede usar diferencias finitas porque, aunque aparentemente los nodos están igualmente espaciados, no es así: hay nodos múltiples ("infinitamente juntos"), con lo que no podríamos incorporar a la tabla la información sobre las derivadas.

c) De la tabla: $p_3(x) = 1 + 3(x-0) - 5(x-0)(x-1) + 2(x-0)(x-1)^2 + 0 + 0 + 0 =$

$$\boxed{p_3(x) = 1 + 3x - 5x(x-1) + 2x(x-1)^2}$$

Es de grado 3 porque los tres últimos coeficientes son 0 (los correspondientes a términos de grado 4, 5 y 6). También se ve en que la columna de diferencias divididas de orden 3 es constante (igual a 2), con lo que la 3ª derivada es constante $\neq 0$, y sólo los polinomios de grado 3 tienen 3ª derivada cte $\neq 0$.

D) $f_{i,3} = \dfrac{f^{3)}(\xi)}{3!} \Rightarrow f^{3)}(\xi) = f_{i,3} \cdot 3! = 2 \cdot 3! = \boxed{12 = p^{3)}(x)}$ (constante como sabíamos)

Lo puedo verificar fácilmente. El término de grado 3 de $p_3(x)$ es $2x^3$
$\Rightarrow p' = 6x^2 + \dots \Rightarrow p'' = 12x + \dots \Rightarrow p''' = 12$ ok.
(pregunta que añadí a posteriori).

Falta enunciar el resultado utilizado

E) No y no. La unicidad del polinomio osculador también se puede demostrar; en lugar de "número de nodos distintos" tendremos ahora "número de condiciones de interpolación". Como nos dan 7 condiciones, el único polinomio de grado ≤ 6 que las cumpla será $p(x)$.

Nota: de hecho, el $p_7(x)$ proporcionado cumple las condiciones (por si alguien quiere comprobarlo).

F) No puedo descartarlo, porque el grado es superior a 6.
Para obtener otros polinomios de grado 7 que también cumplan las condiciones de interpolación, basta añadir una condición más a las condiciones originales (otro nodo, u otra derivada) y calcular el nuevo polinomio osculador. Salvo mucha casualidad, será de grado 7.

G) Reorganizando en forma análoga a la de Hörner:

$$p_3(x) = \{ [2(x-1)-5](x-1)+3 \} x + 1$$

$$p_3(0.25) = \{ [\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{2(-0.75)}_{-1.5}-5}_{-6.5}](-0.75)}_{4.875}+3}_{7.875} \}\cdot 0.25}_{1.96875} + 1 = \boxed{2.96875}$$

La evaluación es óptima en coste computacional (mínimo número de multiplicaciones), en almacenamiento en memoria (si se programa adecuadamente), y en la propagación de los errores de redondeo (que es menos amplificada que mediante la evaluación "directa" del polinomio).

H) El polinomio $p(x)$ de grado ≤ 6 es único, luego con aritmética exacta habría obtenido el mismo valor de $p(\pi)$.

Sin embargo, con aritmética de precisión finita probablemente no (porque los errores de redondeo se propagarían de forma diferente).

Esperaría que fuera mejor este último valor de $p(\pi)$, porque las cuatro primeras filas de la tabla usan sólo información de los nodos $x_0=0$, $x_1=1$, que se encuentran más alejados de $x=\pi=3.14\ldots$ En cambio las 4 últimas filas usan información de los nodos $x_i=\{1,2,3\}$, más próximos a π. Normalmente, cuanto más alejado está x de los nodos, más se amplifican los errores de redondeo.

A) Los nodos serán las raíces de $\varphi_4(x)$: $\frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8} = 0$.

Llamando $z = x^2$ y multiplicando por 8: $35z^2 - 30z + 3 = 0$

$$\Rightarrow z = \frac{30 \pm \sqrt{30^2 - 4 \times 35 \times 3}}{2 \times 35} = \begin{cases} 0.116 \\ 0.741 \end{cases} \Rightarrow x_i = \{-\sqrt{0.741}, -\sqrt{0.116}, \sqrt{0.116}, \sqrt{0.741}\}$$

$= \boxed{\text{Nodos } \{-0.861, -0.340, 0.340, 0.861\}}$ (que coinciden con los del Apéndice).

Con 4 nodos ($n=3$) integrará exactamente polinomios de $\boxed{\text{hasta grado } 2n+1 = 7}$. Esto es fácil de recordar así: con 4 nodos puedo elegir 8 parámetros (4 nodos y 4 coeficientes), así que puedo aspirar a imponer 8 condiciones (la integración exacta de $1, x, x^2, \dots, x^7$, y por tanto de cualquier combinación lineal de ellos).

B) Bastará imponer la integración exacta de $1, x, x^2, x^3$ en $[-1, 1]$:

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} 1\,dx = \underline{2 = A_0 \times 1 + A_1 \times 1 + A_2 \times 1 + A_3 \times 1} \\ \int_{-1}^{1} x\,dx = \underline{0 = A_0(-0.861) + A_1(-0.340) + A_2(0.340) + A_3(0.861)} \\ \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \underline{2\frac{1^3}{3} = A_0(-0.861)^2 + A_1(-0.340)^2 + A_2(0.340)^2 + A_3(0.861)^2} \\ \int_{-1}^{1} x^3\,dx = \underline{0 = A_0(-0.861)^3 + A_1(-0.340)^3 + A_2(0.340)^3 + A_3(0.861)^3} \end{cases}$$

Este sistema lineal 4×4 nos daría los 4 coeficientes. Su solución son los coeficientes de la regla correspondiente a $n=3$, que en el Apéndice se ve que son: $\boxed{A_1 = A_2 = 0.652\ ;\ A_0 = A_4 = 0.348}$

C) El término de error debe ser de la forma $E = K f^{8)}(\xi)$ con $\xi \in (-1, 1)$, porque la regla integra exactamente polinomios de hasta grado 7, cuya derivada 8^a es la primera nula ($\Leftrightarrow$ error nulo $\Rightarrow$ integración exacta). Eligiendo $f(x) = x^8$ y aplicando la regla:

$f(x) = x^8,\quad f'(x) = 8x^7,\quad f''(x) = 56x^6,\quad \dots,\quad f^{8)}(x) = 8!$

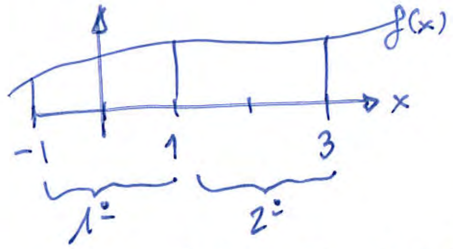
$I = Q + E$ donde $I = \int_{-1}^{1} x^8\,dx$, Q = regla de cuadratura, E = error.

$$I = \left.\frac{x^9}{9}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{9} = \underbrace{0.348(-0.861)^8 + 0.652(-0.340)^8 + 0.652(0.340)^8 + 0.348(0.861)^8}_{Q} + K.8!$$

$$\frac{2}{9} = 0.210 + K \times 8! \quad \Rightarrow K = \frac{0.222 - 0.210}{40320} \Rightarrow \boxed{E = 2.98\times 10^{-7} f^{8)}(\xi) \text{ con } \xi \in (-1,1)}$$

que, incluso con esta aritmética tan poco precisa, coincide muy bien con el término de error del Apéndice, cuya constante K es $1/3472875 = 2.88\times 10^{-7}$ ok.

D) Usaría las 8 evaluaciones de $f(x)$ dividiendo el intervalo $[-1,3]$ en dos subintervalos iguales y aplicando la regla anterior (de 4 nodos) a cada uno:



El 1º subintervalo sería el $[-1,1]$, con lo que me valen los mismos nodos y pesos de los apartados A) y B). Para el subintervalo $[1,3]$ basta desplazar los cuatro nodos 2 unidades hacia la derecha, y usar los mismos pesos:

$$\text{Nodos} = \{-0.861, -0.34, 0.34, 0.861, -0.861+2, -0.34+2, 0.34+2, 0.861+2\}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Nodos} = \{-0.861, -0.34, 0.34, 0.861, 1.139, 1.66, 2.34, 2.861\} \\ \text{Coeficientes} = \{0.348, 0.652, 0.652, 0.348, 0.348, 0.652, 0.652, 0.348\} \end{array}}$$

E) $E = E_1 + E_2$ con $\left\{\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \end{array}\right\}$ = error en $\left\{\begin{array}{l} [-1,1] \\ [1,3] \end{array}\right\}$.

$f = e^{x/2},\quad f' = e^{x/2}/2,\quad f'' = e^{x/2}/4,\quad \dots,\quad f^{8)} = e^{x/2}/2^8 = e^{x/2}/256$

Todas son funciones monótonas (crecientes) en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$$E_1 \simeq 3\times 10^{-7}\frac{e^{\xi_1/2}}{256} \in \left(\frac{3\times 10^{-7} e^{-1/2}}{256}, \frac{3\times 10^{-7} e^{1/2}}{256}\right) = (7\times 10^{-10}, 1.9\times 10^{-9})$$

$$E_2 \simeq 3\times10^{-7}\frac{e^{3\xi/2}}{256} \in \left(\frac{3\times10^{-7}e^{-1/2}}{256}, \frac{3\times10^{-7}e^{3/2}}{256}\right) \approx \left(1.9\times10^{-9}, 5.2\times10^{-9}\right)$$

Por tanto $E \in \left(7\times10^{-10}+1.9\times10^{-9}, 1.9\times10^{-9}+5.2\times10^{-9}\right)$; $\boxed{E \in \left(2.6\times10^{-9}, 7.1\times10^{-9}\right)}$

El error será por defecto, pues es positivo.

La integral exacta vale $I = \int_{-1}^{3} e^{x/2}\,dx = 2e^{x/2}\Big]_{-1}^{3} = 2\left(e^{3/2}-e^{-1/2}\right) = 7.750316821$

El error cometido: $E = 7.750316821 - 7.750316817 = 4\times10^{-9}$ que sí pertenece a

F) Elegiría la regla simple de 8 nodos en $[-1,3]$, porque la regla compuesta usada "optimiza" la posición de los nodos en $[-1,1]$ y en $[1,3]$ por separado, pero no en todo $[-1,3]$. Por ello ahora espero menores cotas del error (y menor error).

Lo primero llevo la integral a $[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{f(1+2t)\,2}\,dt = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt \quad \text{donde } g(t) = 2f(1+2t)$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1+2t \\ dx = 2dt \end{array}\right\} \qquad \simeq \sum_{k=0}^{7} A_k\, g(x_k)$$

pesos y de la regla de 8 coeficientes nodos del Apéndice.

Los nodos serían, por tanto,
las imágenes de los del Apéndice según la transformación $x = 1+2t$; y los pesos, los doble (pues $dx = 2dt$):

Nodos $= 1 + 2\times\{-0.96, -0.80, -0.53, -0.18, 0.18, 0.53, 0.80, 0.96\}$

Coeficientes $= 2\times\{0.10, 0.22, 0.31, 0.36, 0.36, 0.31, 0.22, 0.10\}$

G) Esperaría de nuevo error por defecto, porque la K del término de error, según el Apéndice, es positiva, y todas las derivadas de $f(x) = e^{x/2}$ también lo son $\Rightarrow E > 0$. Lo esperaría con seguridad (siempre que la aritmética fuera suficientemente precisa).

Además esperaría que el error fuera menor que el anterior (menor que 4×10^{-9}) por lo dicho al principio del apartado F). Pero sólo como algo probable (habría que estudiar el término de error para estar seguros).

H) Tras las dos líneas proporcionadas tendremos:

xi = [-0.86114 -0.33998 0.33998 0.86114]

que, como se ve, son los 4 nodos en [-1,1] de izquierda a derecha.
Así que puedo continuar así por ejemplo:

```
Ai = [0.3478548451 0.6521451549];   % tomados del Apéndice
Ai = [Ai Ai([2 1])];                % mismo orden que los nodos
Q1 = sum(Ai.*exp(xi/2));            % regla simple en [-1,1]
xi = xi+2;                          % desplazo nodos 2 a la dcha.
Q2 = sum(Ai.*exp(xi/2));            % regla simple en [1,3]
Q = Q1 + Q2                         % regla compuesta en [-1,3]
```

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3   c) Función Matlab:

Una posibilidad sería (También se podrían usar "handles" a funciones, funciones "inline", etc.)

```
fprima = function(fun, z, h)
% fun p.ej. como lenguaje Matlab entrecomillado tipo 'sin(x)'
  fun = inline(fun);
  yprima = (fun(z+h)/fun(z-h))/2/h;
```