eman ta zabal zazu

EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

ÁLGEBRA

ALJEBRA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO ATALA
SECCIÓN INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

BUKAERAKO ARIKETA

2016–2017 Ikasturtea. Lehenengo deialdia: 2017ko urtarrilak 16

Abizenak:	***Izena:***
Ariketa hau egiteko arauak eGelan argitaratu ziren eta ikasleak ezagutu behar ditu	***Taldea:***

1. ARIKETA

A ATALA

(1.) Izan bedi $W=\mathcal{L}\left(\left\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\cdots,\vec{v}_p\right\}\right)\subset\mathbb{R}^n$ non $\dim W=p<n$ den. Zehaztu $\vec{w}=\sum_{k=1}^{p}\vec{v}_k$ bektorearen koordenatuak W-ren oinarri baten. Arrazoitu erantzuna. (puntu 1)

(2.) Izan bedi $\mathbb{R}^3$-ko $B=\left\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\right\}$ oinarri bat. Zehaztu, arrazoituz, $B'=\left\{\vec{v}_1,\vec{v}_1+\vec{v}_2,\vec{v}_1+\vec{v}_3\right\}$ bektore multzoa ere $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat den. (1,5 puntu)

B ATALA

Izan bitez *W* eta *T* azpiespazio bektorialak:

$$W=\left\{\,p(x)\in\mathbb{P}_3(x)\ /\ p(1)=p'(1)=0\,\right\}\qquad T=\mathcal{L}\left(\left\{1+x,x^2\right\}\right)$$

(1.) Kalkulatu emandako azpiespazio bektorialen oinarri bat eta dimentsioa (Oharra. Oinarriak kalkulatu egin behar dira, beraz, ez da onartuko ariketa honetako 5. apartaduan emandako T-ren oinarria erabiltzea) (1,5 puntu)

(2.) Kalkulatu $I=W\cap T$ azpiespazio bektoriala. (1,5 puntu)

(3.) Zehaztu $S=W+T$ azpiespazio bektoriala. Egiaztatzen al da $\mathbb{P}_3(x)=W\oplus T$ dela? (2 puntu)

(4.) $W\cup T$ multzoa azpiespazio bektoriala al da? Arrazoitu erantzuna. (1,5 puntu)

(5.) Izan bedi T-ren $B_T=\left\{2+2x-x^2,x^2\right\}$ oinarria eta izan bitez $C_{B_T}\left(q(x)\right)=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ $q(x)\in T$ polinomioaren koordenatuak B_T oinarrian. Kalkulatu $q(x)$-ren koordenatuak $\mathbb{P}_3(x)$-ren oinarri kanonikoan. (puntu 1)

2. ARIKETA

$a,b\in\mathbb{R}$ izanik, izan bedi honako bektore multzoa:

$$F=\left\{\vec{u}_1=(1,-1,-1,-1),\vec{u}_2=(1,-1,a,-1),\vec{u}_3=(1,-1,1,1),\vec{u}_4=(3,b,1,1)\right\}$$

(1.) Suposatu F-ko bektoreak zutabetzat dituen T matrize erreal bat. Kalkulatu $h(F)$ a eta b parametro errealen arabera. (2 puntu)

(2.) Zein(tzuk) baldintza bete behar d(ir)a T matrizea singularra izateko? (1 puntu)

Izan bedi A matrizea S ekuazio linealezko sistema bateko ezezagunen koefizienteen matrizea, bere zutabe-bektoreak $G=\{\vec{u}_1=(1,-1,-1,-1), \vec{u}_2=(1,-1,a,-1), \vec{u}_3=(1,-1,1,1)\}$ multzokoak izanik. Dagokion matrize zabaldua $AM=(A|\vec{u}_4)$ izango litzateke.

(3.) S sistema era bektorialean adierazi. (0,5 puntu)

(4.) Sailkatu sistema agertzen diren parametroen balioen arabera. Ebatzi S sistema bateragarria denean Gauss-en metodoa erabiliz. (2,5 puntu)

(5.) Kalkulatu $\vec{u}_4 \notin \mathcal{L}(G)$ egiten duten a eta b parametro errealen balioak $\vec{u}_4 \notin \mathcal{L}(G)$. (2 puntu)

(6.) $a=-1$ bada, eta dagokion espazio bektorialeko ohiko biderkadura eskala erabiliz, kalkulatu arrazoituz, $\vec{u}_4 \notin \mathcal{L}(G)$ betetzeko $b\in\mathbb{R}$ parametro errealen balioetarako, $\vec{u}_4$-tik distantzia txikienera dagoen $\mathcal{L}(G)$-ko bektorearen koordenatuak. Adierazi hurbilketa horretan egindako errorea. (2 puntu)

Ariketa honen ebazpenerako, *Mathematica*-ko ondoko kodigoa erabil daiteke, erabilitako funtzioak eta bere irteerak azalduz.

```
g = {{1, -1, -1, -1}, {1, -1, a, -1}, {1, -1, 1, 1}}; u4 = {3, b, 1, 1}; MatrixRank[g /. a → -1]
2
```

```
g0 = {g[[1]], g[[3]]}; g0[[1]].g0[[2]]
0
```

```
b4 = Simplify[Sum[Projection[u4, g0[[i]]], {i, Length[g0]}]]
```

$$\left\{\frac{3-b}{2}, \frac{1}{2}(-3+b), 1, 1\right\}$$

3. ARIKETA

A ATALA

(1.) Izan bedi $A\in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ eta izan bitez $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ linealki independenteak diren bi bektore propio, beraien balio propioak λ_1 eta λ_2 izanik, hurrenez hurren, non $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zehaztu arrazoituz, honako baieztapenak egia edo gezurra diren:

a) "$5\vec{u}_1$ *bektorea* A *matrizearen bektore propioa da*". (1 puntu)

b) "$\vec{u}_1+\vec{u}_2$ *bektorea* A *matrizearen bektore propioa da*". (1 puntu)

B ATALA

Izan bedi $p(\lambda)=\lambda^2-\lambda$ polinomio karakteristikoa duen M matrize erreala.

(1.) Zehaztu M -ren ordena, espektroa eta determinantea. (2 puntu)

(2.) Arrazoitu M matrizea diagonalizagarria, erregularra, idenpotentea, inbolutiboa edo/eta nilpotentea den. (2 puntu)

(3.) Lortu M matrize ez diagonal bat, non $p(\lambda)=\lambda^2-\lambda$ den. (2 puntu)

(4.) Posible bada, lor ezazu bektore propioz osatutako oinarri bat eta diagonalizatu lortutako M matrizea (2 puntu)

Noten argitalpena	Kalifikazioari helegitea
Eguna: 2017ko urtarrilaren 23a **Ordua**: arratsaldeko 18:00etan. **Tokia**: G.A.U.R. edo eGela plataforma	**Eguna**: 2017ko urtarrilaren 26a **Ordua**: goizeko 12:00etan. **Tokia**: 7I1 Matematika Aplikatuko Laborategia