eman ta zabal zazu
EUSKAL HERRIKO UNIBERTSITATEA
UNIVERSIDAD DEL PAIS VASCO

BILBOKO INGENIARITZA ESKOLA
ESCUELA DE INGENIERÍA DE BILBAO

ÁLGEBRA
ALJEBRA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO ATALA
SECCIÓN INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL

BUKAERAKO ARIKETA. EBAZPENA

2016–2017 Ikasturtea. Lehenengo deialdia: 2017ko urtarrilak 16

1. ARIKETA

A ATALA

(1.) Izan bedi $W = \mathcal{L}\left(\left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_p\right\}\right) \subset \mathbb{R}^n$ non $\dim W = p < n$ den. Zehaztu $\vec{w} = \sum_{k=1}^{p} \vec{v}_k$ bektorearen koordenatuak W-ren oinarri batean. Arrazoitu erantzuna. (puntu 1)

Enuntziatuak W azpiespazioaren sistema sortzailea ematen du, $B = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_p\right\}$, p bektorez osatuta dagoena. $\dim W = p$ denez, B-ren barne dauden bektoreak independenteak dira, beraz, B sistema W-ren oinarri bat da. Orduan, $\vec{w}$ bektorearen koordenatuak $B = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_p\right\}$ oinarriarekiko honakoak dira:

$$\vec{w} = \sum_{k=1}^{p} \vec{v}_k \Rightarrow \boxed{\left(\vec{w}_B\right)^T = \underbrace{(1, 1, 1, \quad \cdots \quad, 1)}_{p\ koordenatu}}$$

(2.) Izan bedi $\mathbb{R}^3$-ko $B = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\right\}$ oinarri bat. Zehaztu, arrazoituz, $B' = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3\right\}$ bektore multzoa ere $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat den. (1,5 puntu)

Izan bedi $M = \left(\vec{v}_1 \,|\, \vec{v}_2 \,|\, \vec{v}_3\right)$ matrizea, bere zutabe-bektoreak B oinarriko bektoreekin osatuta dagoena. Hiru bektoreak askeak direnez, determinantearen propietateak aplikatuz:

$$0 \neq det(M) = \det\left(\vec{v}_1 \,|\, \vec{v}_2 \,|\, \vec{v}_3\right) = \det\left(\vec{v}_1 \,|\, \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \,|\, \vec{v}_1 + \vec{v}_3\right)$$

Orduan, $B' = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3\right\}$ bektore sistemak $\mathbb{R}^3$-ko **oinarri** bat **osatzen** du, hiru dimentsioko espazio bektorial bateko hiru bektore askeen multzoa delako.

Ariketa ebazteko era bat, B' oinarriko koordenatuak B oinarrian lortzea da. Koordenatu horiek matrize baten zutabeetan jarriz, bere heina kalkulatu, ondorio bera lortzen da: B' osatzen duten hiru bektoreak independenteak dira.

$$r(M_1) = r\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

B ATALA

Izan bitez W eta T azpiespazio bektorialak:

$$W = \left\{ p(x) \in \mathbb{P}_3(x) \ / \ p(1) = p'(1) = 0 \right\}$$
$$T = \mathcal{L}\left(\left\{1 + x, x^2\right\}\right)$$

(1.) Kalkulatu emandako azpiespazio bektorialen oinarri bat eta dimentsioa (Oharra. Oinarriak kalkulatu egin behar dira, beraz, ez da onartuko ariketa honetako 5. apartaduan emandako T-ren oinarria erabiltzea) (1,5 puntu)

<u>***W* azpiespazioa**</u>. $\forall p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in W$:

- $p(1) = a + b + c + d = 0 \quad (*)$

- $p'(1) = 3a + 2b + c = 0 \Rightarrow c = -3a - 2b$

$(*)$ ekuazioan $c = -3a - 2b$ ordezkatuz: $d = 2a + b$

Orduan: $W = \{ p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathrm{P}_3(x) \;/\; c = -3a - 2b \wedge d = 2a + b \}$

$\forall p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in W$:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + (-3a - 2b)x + 2a + b = a(x^3 - 3x + 2) + b(x^2 - 2x + 1)$$

- Oinarria: $\boxed{B_W = \{ x^3 - 3x + 2,\, x^2 - 2x + 1 \}}$
- Dimentsioa: $\boxed{\dim W = 2}$

<u>***T* azpiespazioa**</u>. T S-ren sistema sortzaileko bi bektoreak independenteak direla egiazta daiteke:

$$\alpha(1 + x) + \beta x^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Orduan:

- Oinarria: $\boxed{B_T = \{ 1 + x,\, x^2 \}}$
- Dimentsioa: $\boxed{\dim T = 2}$

(2.) Kalkulatu $I = W \cap T$ azpiespazio bektoriala. (1,5 puntu)

$$I = W \cap T = \{ p(x) \in \mathrm{P}_3(x) \;/\; p(x) \in W \wedge p(x) \in T \}$$

Beraz, $\forall p(x) \in I$:

$$p(x) = \alpha(x^3 - 3x + 2) + \beta(x^2 - 2x + 1) = \lambda(1 + x) + \mu x^2$$
$$p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - x(3\alpha + 2\beta) + 2\alpha + \beta = \lambda + \lambda x + \mu x^2$$

Dagokion sistema planteatu eta ebazten da:

$$\begin{cases} (1): \alpha = 0 \\ (2): \beta = \mu \\ (3): -3\alpha - 2\beta = \lambda \\ (4): 2\alpha + \beta = \lambda \end{cases}$$

(3) eta (4) ekuazioetan $\alpha = 0$ ordezkatuz, honakoa lortzen da: $-2\beta = \lambda = \beta \Leftrightarrow \lambda = \beta = 0 \quad (*)$

Orduan, $(*)$-ko emaitzak (2) ekuaziora eramanez: $\alpha = \beta = \lambda = \mu = 0$

Beraz, ebakidura azpiespazioa zehaztuta geratuko litzateke: $\boxed{I = W \cap T = \{ n(x) = 0 \} \Rightarrow \dim I = 0}$

(3.) Zehaztu $S = W + T$ azpiespazio bektoriala. Egiaztatzen al da $\mathrm{P}_3(x) = W \oplus T$ dela? (2 puntu)

Dimentsioaren teorema aplikatuz:

$$\dim(W + T) = \dim W + \dim T - \dim(W \cap T) = 4$$

Beraz,: $\boxed{S = W + T = \mathrm{P}_3(x)}$

Gainera, $I = W \cap T = \{ n(x) = 0 \}$ denez, $\boxed{\mathrm{P}_3(x) = W \oplus T}$ dela egiaztatzen da.

Batuketa azpiespazioa zehazteko beste era bat, W eta T azpiespazioko oinarriekin sistema sortzailea osatzea da, eta bektore independenteekin batuketa espazioko oinarria lortuko genuke:

$$W+T=\mathcal{L}\left(\left\{\, x^3-3x+2,\, x^2-2x+1, 1+x,\, x^2 \right\}\right)$$

Independenteak diren ikusteko, lau polinomio horien oinarri kanonikoarekiko koordenatuak matrize baten zutabeetan jarriko ditugu:

$$M_2=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |M_2| = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Beraz, lau bektoreak independenteak dira: $\dim(W+T)=4 \Rightarrow W+T=\mathrm{P}_3(x)$

(4.) $W \cup T$ multzoa azpiespazio bektoriala al da? Arrazoitu erantzuna. (1,5 puntu)

$$U = W \cup T = \left\{\, p(x) \in \mathrm{P}_3(x) \;/\; p(x) \in W \vee p(x) \in T \,\right\}$$

$W \cup T$ multzoa EZ da $\mathrm{P}_3(x)$-ko azpiespazio bektoriala da. Hau egiaztatzeko nahikoa da kontraadibide bat aurkitzea.

Izan bitez $q(x)=x^2-2x+1 \in W$ eta $r(x)=x^2 \in T$ polinomioak:

$$s(x)=q(x)-r(x)=\left(x^2-2x+1\right)-x^2=-2x+1 \notin U$$

Hau da, $q(x), r(x) \in W \cup T$ bi polinomio hartu dira, eta, hala ere, beraien konbinazio lineala den baina bildura multzoan ez dagoen polinomio bat lortu da, $s(x) \notin W \cup T$.

(5.) Izan bedi T-ren $B_T=\left\{2+2x-x^2, x^2\right\}$ oinarria eta izan bitez $q(x)\in T$ polinomioaren $C_{B_T}\left(q(x)\right)=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ koordenatuak B_T oinarrian. Kalkulatu $q(x)$-ren koordenatuak $\mathrm{P}_3(x)$-ren oinarri kanonikoan. (1 puntu)

Emandako $q(x)\in T$ polinomioaren koordenatuak, polinomio hori B_T oinarriarekiko konbinazio lineal bezala jartzerakoan lortutako koefizienteak dira; kasu honetan:

$$\boxed{q(x)=-2\left(2+2x-x^2\right)+5x^2=-4-4x+7x^2}$$

Oinarri kanonikoa $B_C=\left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ izanik: $\boxed{C_{B_C}\left(q(x)\right)=\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Emaitza berdina lor daiteke dagokion koordenatu-aldaketa matrizea erabiliz:

$$M_{B_T\to B_C}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C_{B_C}\left(q(x)\right)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. ARIKETA

$a, b \in \mathbb{R}$ izanik, izan bedi honako bektore multzoa:

$$F = \left\{ \vec{u}_1 = (1,-1,-1,-1), \vec{u}_2 = (1,-1,a,-1), \vec{u}_3 = (1,-1,1,1), \vec{u}_4 = (3,b,1,1) \right\}$$

(1.) Demagun T matrize erreal bateko zutabeak F-ko bektoreak direla. Kalkulatu T-ren heina a eta b parametro errealen arabera. (2 puntu)

T matrize erreala osatzen da, eta Gaussen algoritmoa aplikatuz, errenkaden eragiketa elementalen bidez, matrize mailakatu baliokide bat lortzen da. Honela, $h(T)$ lor daiteke.

Erabilitako notazioa:

- F_{ij} : i eta j errenkadak elkaltrukatzea
- $F_i(\lambda)$: i errenkada λ eskalar batez biderkatzea
- $F_{ij}(\lambda)$: i errenkadari j errenkada bat gehitzea, λ eskalar batez biderkatu ondoren

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & b \\ -1 & a & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{F_{i1}(1)\\ i=2,3,4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3+b \\ 0 & 1+a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3+b \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3+b \end{pmatrix} = T_2$$

Orduan: $|T| = |T_2| = 2 \cdot (1+a) \cdot (3+b)$

- $\boxed{a \neq -1 \wedge b \neq -3}$ bada: $\boxed{h(T) = 4}$
- $\boxed{a \neq -1 \wedge b = -3}$ bada:

$$T \sim T_2\big|_{\substack{a\neq -1\\ b=-3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{h(T) = h\left(T_2\big|_{b=-3}\right) = 3}$$

- $\boxed{a = -1 \wedge b \neq -3}$ bada:

$$T \sim T_2\big|_{\substack{a=-1\\ b\neq -3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3+b \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{h(T) = h\left(T_2\big|_{a=-1}\right) = 3}$$

- $\boxed{a = -1 \wedge b = -3}$ bada:

$$T \sim T_2\big|_{\substack{a=-1\\ b=-3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{h(T) = h\left(T_2\big|_{\substack{a=-1\\ b=-3}}\right) = 2}$$

(2.) T matrizea, zein kasutan da singularra? (puntu 1)

T matrizea singularra da $\det T = 0 \Leftrightarrow h(T) < 4$ denean.

Aurreko apartaduko analisiaren arabera, ***T* singularra** da $\boxed{a = -1 \vee b = -3}$ denean.

Izan bedi A matrizea S ekuazio linealetako sistema bateko koefizienteen matrizea, bere zutabe-bektoreak

$G=\{\vec{u}_1=(1,-1,-1,-1),\vec{u}_2=(1,-1,a,-1),\vec{u}_3=(1,-1,1,1)\}$ multzokoak izanik. Sistemari dagokion matrize zabaldua $AM=(A|\vec{u}_4)$ izango litzateke.

(3.) S sistema era bektorialean adierazi. (0,5 puntu)

Izan bitez $A=(\vec{u}_1|\vec{u}_2|\vec{u}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\-1&a&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\in M_{4\times3}(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in M_{3\times1}(\mathbb{R})$ eta $B=\begin{pmatrix}3\\b\\1\\1\end{pmatrix}\in M_{4\times1}(\mathbb{R})$ matrizeak.

S sistemaren adierazpen matriziala honakoa da: $\boxed{AX=B}$

Garatuz, S sistemaren adierazpen bektoriala lor daiteke: $\boxed{\vec{u}_1\cdot x+\vec{u}_2\cdot y+\vec{u}_3\cdot z=\vec{u}_4}$

Analogoki: $\boxed{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\cdot x+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}\cdot y+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot z=\begin{pmatrix}3\\b\\1\\1\end{pmatrix}}$

(4.) Sailkatu sistema agertzen diren parametroen balioen arabera. Ebatzi S sistema bateragarria denean Gauss-en metodoa erabiliz. (2,5 puntu)

$A=(\vec{u}_1|\vec{u}_2|\vec{u}_3)\in M_{4\times3}(\mathbb{R})$ matrizearen heina aztertzen da, $a\in\mathbb{R}$ parametroaren balioen arabera:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&-1&-1\\-1&a&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\substack{F_{i1}(1)\\i=2,3,4}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&1+a&2\\0&0&2\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F_{23}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1+a&2\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F_{34}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1+a&2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}=A_2$$

Orduan:

- $\boxed{a\neq-1}$ bada: $A\sim A_2\Rightarrow\boxed{h(A)=h(A_2)=3}$
- $\boxed{a=-1}$ bada:

$$A\sim A_2\big|_{a=-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{h(A)=h\left(A_2\big|_{a=-1}\right)=2}$$

Matrize zabaldua $AM=(A|\vec{u}_4)=T\in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ izanik, honako kasuak ditugu (n hizkiaz S sistemako ezezagun kopurua adierazten du):

- $\boxed{a\neq-1\wedge b\neq-3}$ bada: Sistema bateraezina, $\boxed{h(AM)=4\neq h(A)=3}$ delako.
- $\boxed{a\neq-1\wedge b=-3}$ bada: Sistema bateragarri determinatua, $\boxed{h(AM)=3=h(A)=n}$ delako.

  S –ren sistema mailakatu baliokidea ebazten da atzerakako prozesua erabiliz:

$$AM = T \sim T_2\big|_{b=-3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+a & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{S_1 \equiv S: \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=2 \end{cases}}$$

- $\boxed{a=-1 \wedge b \neq -3}$ bada: Sistema bateraezina, $\boxed{h(AM)=3 \neq h(A)=2}$ delako.
- $\boxed{a=-1 \wedge b=-3}$ bada: Sistema bateragarri indeterminatua, $\boxed{h(AM)=2=h(A)<n=3}$ delako.
  S –ren sistema mailakatu baliokidea ebazten da atzerakako prozesua erabiliz:

$$T \sim T_2\big|_{\substack{a=-1\\b=-3}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{S_2 \equiv S: \begin{cases} x=1-y \\ z=2 \end{cases} \quad \forall y \in \mathbb{R}}$$

(5.) Kalkulatu $\vec{u}_4 \notin \mathcal{L}(G)$ egiten duten a eta b parametro errealen balioak. (2 puntu)

$G=\{\vec{u}_1=(1,-1,-1,-1), \vec{u}_2=(1,-1,a,-1), \vec{u}_3=(1,-1,1,1)\}$ izanik, $\vec{u}_4 \notin \mathcal{L}(G)$ beteko da S sistema bateraezina denean.

Beraz, aurreko apartaduko emaitzen arabera, $\vec{u}_4 \notin \mathcal{L}(G)$ egongo da $\boxed{b \neq -3 \quad \forall a \in \mathbb{R}}$ denean.

(6.) $a=-1$ bada, eta dagokion espazio bektorialeko ohiko biderkadura eskala erabiliz, kalkulatu arrazoituz, $\vec{u}_4 \notin \mathcal{L}(G)$ betetzen duen $b \in \mathbb{R}$ parametro errealen balioetarako, $\vec{u}_4$-tik distantzia txikienera dagoen $\mathcal{L}(G)$-ko bektorearen koordenatuak. Adierazi hurbilketa horretan egindako errorea. (2 puntu)

Ariketa honen ebazpenerako, *Mathematica*-ko ondoko kodigoa erabil daiteke, erabilitako funtzioak eta bere irteerak azalduz.

```
g = {{1, -1, -1, -1}, {1, -1, a, -1}, {1, -1, 1, 1}}; u4 = {3, b, 1, 1}; MatrixRank[g /. a → -1]
2
```

```
g0 = {g[[1]], g[[3]]}; g0[[1]].g0[[2]]
0
```

```
b4 = Simplify[Sum[Projection[u4, g0[[i]]], {i, Length[g0]}]]
{(3 - b)/2, 1/2 (-3 + b), 1, 1}
```

Aztertu beharreko kasua $\boxed{a=-1 \wedge b \neq -3}$ denekoa da. Kasu honetarako, 4. Atalean kalkulatutakoaren arabera, $h(AM)=3 \neq h(A)=2$ da. Beraz, S sistema bateraezina da, eta ondorioz, $\vec{u}_4 \notin \mathcal{L}(G)$.

$\vec{u}_4$-tik distantzia txikienera dagoen $\mathcal{L}(G)$-ko bektorea lortzeko, $\vec{u}_4$ bektorea $W=\mathcal{L}(G)$ azpiespazioaren gainean ortogonalki proiektatu behar da.

$$\forall \vec{w} \in W = \mathcal{L}(G): \quad proy_W\, \vec{u}_4 = \vec{b}_4 \in W \ / \ d(\vec{u}_4, \vec{b}_4) \leq d(\vec{u}_4, \vec{w})$$

Aztertutakoaren arabera, $h(A)=h(\vec{u}_1 | \vec{u}_2 | \vec{u}_3)=2$. Beraz, $\dim(W)=2$ da, $W=\mathcal{L}(G)$ izanik.

Mathematica-ko kodigoa: `MatrixRank[g/.a->-1]` (**Out:** 2)

$W=\mathcal{L}(G)$ -ren oinarri bat lortzeko G-ren bi bektore aske behar dira, adibidez:

$$B_W = \left\{ \vec{w}_1 = (1,-1,-1,-1),\ \vec{w}_2 = (1,-1,1,1) \right\}$$

$\mathbb{R}^4$-ko ohiko biderkadura eskalarra erabiliz: $\langle \vec{w}_1 , \vec{w}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \vec{w}_1 \perp \vec{w}_2$. Beraz, oinarria ortogonala da.

Mathematica-ko kodigoa: `g0={g[[1]],g[[3]]}; g0[[1]].g0[[2]]` (**Out:** 0)

Proiekzio ortogonala honela kalkulatzen da:

- $\vec{b}_{41} = proy_{\vec{w}_1}\, \vec{u}_4 = \dfrac{\langle \vec{u}_4 , \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1 , \vec{w}_1 \rangle} \cdot \vec{w}_1 = \dfrac{1-b}{4} \cdot \vec{w}_1 = \dfrac{1-b}{4}(1,-1,-1,-1)$
- $\vec{b}_{42} = proy_{\vec{w}_2}\, \vec{u}_4 = \dfrac{\langle \vec{u}_4 , \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2 , \vec{w}_2 \rangle} \cdot \vec{w}_2 = \dfrac{5-b}{4} \cdot \vec{w}_2 = \dfrac{5-b}{4}(1,-1,1,1)$

$$\boxed{\vec{b}_4 = proy_W\, \vec{u}_4 = \sum_{i=1}^{2} proy_{\vec{w}_i}\, \vec{u}_4 = \vec{b}_{41} + \vec{b}_{42} = \left(\frac{3-b}{2}, -\frac{3-b}{2}, 1, 1 \right)}$$

Mathematica-ko kodigoa: `b4=Simplify[Sum[Projection[u4,g0[[i]]],{i,Length[g0]}]]`

Hurbilketan egindako errorea, $\vec{u}_4$ eta bere proiekzioaren ($proy_W\, \vec{u}_4 = \vec{b}_4$) arteko diferentzia-bektorearen norma bezala kuantifikatzen da:

- $\vec{e} = \vec{b}_4 - \vec{u}_4 = \left(-\dfrac{b+3}{2}, -\dfrac{b+3}{2}, 0, 0 \right)$
- $\boxed{\| \vec{e} \| = +\sqrt{\langle \vec{b}_4 - \vec{u}_4 , \vec{b}_4 - \vec{u}_4 \rangle} = \dfrac{|b+3|}{\sqrt{2}} \quad \forall b \in \mathbb{R} - \{-3\}}$

3. ARIKETA

A ATALA

(1.) Izan bedi $A \in \mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ eta izan bitez A matrizearen $\vec{u}_1$ eta $\vec{u}_2$ bi bektore propio, beraien balio propioak λ_1 eta λ_2 izanik, hurrenez hurren, non $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Balio eta bektore propioen definiziotik, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ eta $\vec{u}_1 \neq k\,\vec{u}_2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$ izanik, honakoa daukagu:

$$\begin{cases} A\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1 \\ A\vec{u}_2 = \lambda_2 \vec{u}_2 \end{cases}$$

Zehaztu arrazoituz, honako baieztapenak egia edo gezurra diren:

a) "$5\vec{u}_1$ *bektorea* A *matrizearen bektore propioa da*". Egia. (puntu 1)

Kasu honetan: $A(5\vec{u}_1) = 5A\vec{u}_1 = 5\lambda_1 \vec{u}_1 = \lambda_1 (5\vec{u}_1)$

Balio eta bektore propioen definizioa betetzen da, beraz, $5\vec{u}_1$ bektorea A matrizearen bektore propioa da, asociado, λ_1 balio propioari elkartutakoa.

b) "$\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ *bektorea* A *matrizearen bektore propioa da*". Gezurra. (puntu 1)

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ denez: $A(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = A\vec{u}_1 + A\vec{u}_2 = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 \neq \lambda(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$

Ez da balio eta bektore propioen definizioa betetzen, beraz, $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ EZ da A matrizearen bektore propioa.

B ATALA

Izan bedi $p(\lambda)=\lambda^2-\lambda$ polinomio karakteristikoa duen M matrize erreala.

(1.) Zehaztu M -ren ordena, espektroa, determinantea eta aztarna. (2 puntu)

Polinomio karakteristikoa bigarren gradukoa denez, matrizearen ordena: $\boxed{M \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}$

Espektroa: $p(\lambda)=\lambda^2-\lambda=\lambda(\lambda-1) \Rightarrow \boxed{\sigma(M)=\{\lambda_1=0, \lambda_2=1\}}$

Aztarna: $\boxed{Aztarna(M)=\sum_{i=1}^{2}\lambda_i=\lambda_1+\lambda_2=1}$

Determinantea: $\boxed{\det(M)=\prod_{i=1}^{2}\lambda_i=\lambda_1\cdot\lambda_2=0}$

(2.) Arrazoitu M matrizea diagonalizagarria, erregularra, idenpotentea, inbolutiboa edo/eta nilpotentea den (2 puntu)

Aurreko apartaduan egindako analisitik, ondokoa ondoriozta dezakegu:

- diagonalizagarria da, $M \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ delako, eta bi balio propio erreal eta desberdin dituelako
- ez da erregularra, $\det(M)=0$ delako.

Cayley−Hamiltonen teorema aplikatuz:

$$p(M)=M^2-M=(0)_{2\times 2} \Leftrightarrow \boxed{M^2=M}$$

Beraz, matrizea idenpotentea $(M^2=M)$ da, baina ez da inbolutiboa $(M^2=M\neq \mathrm{I}_2)$ eta ez da nilpotentea $(M^2=M\neq(0)_{2\times 2})$.

(3.) Lortu M matrize ez diagonal bat, non $p(\lambda)=\lambda^2-\lambda$ den. (2 puntu)

Izan bedi halako $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ matrizea:

- bere determinantea nulua da: $\det M=ad-bc=0$
- bere aztarna 1 da: $tr(M)=a+d=1$

Ondoko ekuazio ez linealetako sistema daukagu:

$$\begin{cases} (1): a+d=1 \\ (2): bc=ad \quad \Rightarrow ad=bc \end{cases}$$

(1) ekuazioa (2) ekuazioan ordezkatuz: $\begin{cases} a=1-d \\ b=\dfrac{d(1-d)}{c} \end{cases} \quad \forall c \in \mathbb{R}-\{0\} \wedge \forall d \in \mathbb{R}.$

Adibidez, $c=1=d$ eginez, ez diagonala den matrize posible bat honakoa litzateke:

$$\boxed{M=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}$$

(4.) Posible bada, lor ezazu bektore propioz osatutako oinarri bat eta diagonalizatu lortutako M matrizea (2 puntu)

Izan bedi $M=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathrm{R})$ matrizea.

Posible da bektore propioz osatutako oinarri bat lortzea:

- $\forall\vec{u}(x,y)\in S(0)=\left\{\vec{u}\in \mathrm{R}^2\,/\,A\vec{u}=\vec{0}\right\}$: $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow y=-x$

$$S(0)=\left\{\vec{u}(x,y)\in \mathrm{R}^2\,/\,y=-x\right\}\Rightarrow \boxed{B_{S(0)}=\left\{\vec{u}_1(1,-1)\right\}}$$

- $\forall\vec{u}(x,y)\in S(1)=\left\{\vec{u}\in \mathrm{R}^2\,/\,A\vec{u}=\vec{u}\right\}$: $\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Rightarrow x+y=y\Rightarrow x=0$

$$S(1)=\left\{\vec{u}(x,y)\in \mathrm{R}^2\,/\,x=0\right\}\Rightarrow \boxed{B_{S(1)}=\left\{\vec{u}_2(0,1)\right\}}$$

$$\boxed{B_\lambda=\left\{\vec{u}_1(1,-1),\vec{u}_2(0,1)\right\}}$$

M matrizea diagonalizagarria denez $\exists P\in \mathrm{M}_{2\times 2}(\mathrm{R})$ *alderanzgarria* / $P^{-1}\cdot M\cdot P=D$ non:

- $\boxed{P=\left(\vec{u}_1\,|\,\vec{u}_2\right)=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}}$
- $\boxed{D=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA - E.U.I.T.I. BILBAO - U.P.V. E.H.U. - BILBOKO I.I.T.U.E. MATEMATIKA APLIKATUAREN SAILA

Noten argitalpena	Bukaerako ariketaren berrikuspena
Eguna: 2017ko urtarrilaren 23a	**Eguna**: 2017ko urtarrilaren 26a
Ordua: arratsaldeko 18:00etan.	**Ordua**: goizeko 12:00etan.
Tokia: G.A.U.R. edo eGela plataforma	**Tokia**: 7I1 Matematika Aplikatuko Laboratategia