BUKAERAKO ARIKETA. EBAZPENA.
KALIFIKAZIOAREN %100AREN GAINEKO EBALUAZIOA

2016–2017 kurtsoa. Ez-ohiko deialdia: 2017ko ekainak 14

1. ARIKETA

A ATALA

Zehaztu matrize inbolutibo batek bete behar dituen baldintzak matrize ortogonala ere izateko. Arrazoitu erantzuna bakarrik beharrezko definizioak eta lengoaia sinboliko matematiko egokia erabiliz. (2 puntu)

Izan bedi $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizea. A matrizea:

- **inbolutiboa** da baldin eta $A^2 = \mathbb{I}_n$ bada, $\mathbb{I}_n$ *n* ordenako identitate matrizea izanik
- **alderanzgarria** edo **erregularra** da baldin eta $\exists A^{-1}$ *non* $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n$
- **ortogonala** da baldin eta alderanzgarria bada eta $A^{-1} = A^t$

Jarritako definizioetatik abiatuz ikusten denez, A matrizea inbolutiboa bada, orduan erregularra da eta bere alderantzizkoaren berdina da:

$$A^2 = A\cdot A = \mathbb{I}_n \quad \Rightarrow \quad A = A^{-1}$$

Beraz, A matrize inbolutiboa ortogonala izateko, simetrikoa izan behar da:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} A^{-1} = A \\ A^{-1} = A^t \end{array}\right\} \Rightarrow A = A^t}$$

B ATALA

$F = \{\, p_1(x),\, p_2(x),\, p_3(x),\, p_4(x) \,\} \subset \mathbb{P}_3(x)$ polinomio multzoa kontsideratu behar da, eta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

non:
$$\boxed{\begin{array}{ll} p_1(x) = 1 - x - x^2 - x^3 & p_2(x) = 1 - x + \alpha x^2 - x^3 \\ p_3(x) = 1 - x + x^2 + x^3 & p_4(x) = 3 + \beta x + x^2 + x^3 \end{array}}$$

(1.) Lortu F-ko polinomioen koordenatuak $\mathbb{P}_3(x)$-ko oinarri kanonikoan eta jarri koordenatu horiek M deitutako matrize baten errenkada bezala. (puntu 1)

Izan bedi $\mathbb{P}_3(x)$ espazio bektorialeko oinarri kanonikoa: $B_{\mathbb{P}_3(x)} = \{1, x, x^2, x^3\}$

Oinarri honekiko, F bektoreko koordenatuak honakoak dira:

- $p_1(x) = 1 - x - x^2 - x^3 \Rightarrow \vec{p}_1 = (1,-1,-1,-1)$
- $p_2(x) = 1 - x + \alpha x^2 - x^3 \Rightarrow \vec{p}_2 = (1,-1,\alpha,-1)$
- $p_3(x) = 1 - x + x^2 + x^3 \Rightarrow \vec{p}_3 = (1,-1,1,1)$
- $p_4(x) = 3 + \beta x + x^2 + x^3 \Rightarrow \vec{p}_1 = (3,\beta,1,1)$

M matrizea: $$\boxed{M=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&-1&\alpha&-1\\1&-1&1&1\\3&\beta&1&1\end{pmatrix}}$$

(2.) Kalkulu matriziala eta Gauss-en algoritmoa erabiliz, lortu $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ parametroen balioak $\mathcal{L}(F)\neq\mathbb{P}_3(x)$ betetzeko. (2.5 puntu)

$\mathcal{L}(F)\neq\mathbb{P}_3(x)$ soilik egiaztatuko da F bektore sistema lotua denean, hau da: $h(F)<4$

Gauss-en algoritmoa aplikatuko da emandako M matrize errealaren errenkadekiko baliokidea den matrize mailakatu bat lortzeko. Honela, $h(M)$ eta, beraz, $h(F)$ lor daitezke.

Erabilitako idazkera:

- F_{ij} : *i* eta *j* errenkadak elkartrukatu
- $F_i(\lambda)$: *i*. errenkada λ eskalar batengatik biderkatu
- $F_{ij}(\lambda)$: *i* errenkadari *j* errenkada gehitu λ eskalar batengatik biderkatu ondoren

$$M=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&-1&\alpha&-1\\1&-1&1&1\\3&\beta&1&1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\substack{F_{i1}(-1)\ i=2,3\\F_{41}(-3)}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&\alpha+1&0\\0&0&2&2\\0&\beta+3&4&4\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F_{34}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&\alpha+1&0\\0&\beta+3&4&4\\0&0&2&2\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F_{23}}\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&\beta+3&4&4\\0&0&\alpha+1&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}\sim$$

$$\underbrace{\sim}_{F_{24}(-2)}\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&\beta+3&0&0\\0&0&\alpha+1&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}=M_1$$

Determinantea kalkulatuz: $$M_1=\begin{vmatrix}1&-1&-1&-1\\0&\beta+3&0&0\\0&0&\alpha+1&0\\0&0&2&2\end{vmatrix}=1\cdot(\beta+3)\cdot\begin{vmatrix}\alpha+1&0\\2&2\end{vmatrix}=1\cdot(\beta+3)\cdot(\alpha+1)\cdot2$$

M eta M_1 errenkadekiko baliokideak dira, beraz, $h(M)=h(M_1)$. Orduan:

- $\boxed{\beta\neq-3\wedge\alpha\neq-1}$ bada: $\boxed{h(M_1)=h(M)=4}$
- $\boxed{\beta\neq-3\wedge\alpha=-1}$ bada:

$$M\sim M_1\big|_{\substack{\beta\neq-3\\\alpha=-1}}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&\beta+3&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&\beta+3&0&0\\0&0&2&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}=M_1'\Rightarrow\boxed{h(M)=h(M_1')=3}$$

- $\boxed{\beta=-3\wedge\alpha\neq-1}$ bada:

$$M\sim M_1\big|_{\substack{\beta=-3\\\alpha\neq-1}}=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&0&0\\0&0&\alpha+1&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\0&0&\alpha+1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=M_1''\Rightarrow\boxed{h(M)=h\left(M_1''\right)=3}$$

- $\boxed{\beta=-3 \wedge \alpha=-1}$ bada:

$$M \sim M_1\Big|_{\substack{\beta=-3\\ \alpha=-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_1''' \Rightarrow \boxed{r(M)=r\left(M_1'''\right)=2}$$

Beraz, egindako galderari erantzunez:

- $\boxed{\beta \neq -3 \wedge \alpha \neq -1}$ bada: $\quad h(F)=4 \;\Rightarrow\; F\ askea \;\Rightarrow\; \boxed{\mathcal{L}(F)=\mathbb{P}_3(x)}$
- $\boxed{\beta = -3 \vee \alpha = -1}$ bada: $\quad h(F)\leq 3 \;\Rightarrow\; F\ lotua \;\Rightarrow\; \boxed{\mathcal{L}(F)\neq\mathbb{P}_3(x)}$

(3.) $\alpha=0$ eta $\beta=-3$ kasurako, lortu $S=\mathcal{L}(F)$ azpiespazioaren oinarri ortogonal bat. (2 puntu)

$\boxed{\beta=-3 \wedge \alpha=0}$ denean:

- $h(F)=3 \;\Rightarrow\; F\ lotua$
- F-ko hiru bektore askeak dira, bestea hiru horien konbinazio lineal bezala jar daiteke
- $\dim(S)=3$

Errenkaden eragiketa elementalak eginez, $S=\mathcal{L}(F)$-ren oinarri erraza lor daiteke:

$$M \sim M_1\Big|_{\substack{\beta=-3\\ \alpha=0}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F_{13}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$M \underbrace{\sim}_{F_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lehenengo hiru errenkadek S-ren oinarri bateko polinomioen koordenatuak adierazten dute, $B_{\mathbb{P}_3(x)}$ oinarri kanonikoarekiko: $\quad B_S=\left\{b_1(x)=1-x,\, b_2(x)=x^2,\, b_3(x)=x^3\right\}$.

$\mathbb{P}_3(x)$ espazio bektorialeko ohiko biderkadura eskalarra hartuz, oinarri hau jada ortogonala da, zeren eta:

$$\left\langle b_1(x), b_2(x)\right\rangle = \left\langle b_1(x), b_3(x)\right\rangle = \left\langle b_2(x), b_3(x)\right\rangle = 0$$

Beraz, S-ren oinarri ortogonal bat hauxe da: $\boxed{B_S=\left\{b_1(x)=1-x,\, b_2(x)=x^2,\, b_3(x)=x^3\right\}}$

(4.) S aurreko apartatuko azpiespazioa izanik, lortu $q(x)=1-x^2$ polinomioaren hurbilketarik onena $S^{\perp}$ azpiespazioan. (2.5 puntu)

$S\subset\mathbb{P}_3(x)$ azpiespazioarekiko ortogonalak diren $p(x)\in\mathbb{P}_3(x)$ polinomio guztien multzoari S-ren osagarri ortogonala deritzo, eta $S^{\perp}$ bezala adierazten da:

$$\boxed{S^{\perp}=\left\{q(x)\in\mathbb{P}_3(x)\ \ /\ \ \left\langle q(x),\, p(x)\right\rangle=0 \quad \forall p(x)\in S\right\}}$$

$B_S=\left\{b_1(x)=1-x,\, b_2(x)=x^2,\, b_3(x)=x^3\right\}$ oinarria hartuz, honakoa egiaztatzen da:

$$\forall q(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in S^{\perp}: \quad \langle q(x), b_i(x)\rangle = 0 \quad (i=1,2,3)$$

Eragiketa matrizialak eginez:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ c=d=0 \end{cases}$$

$$\boxed{S^{\perp}=\left\{ q(x)=a+bx+cx^2+dx^3\in \mathbb{P}_3(x) \ / \ a=b \wedge c=d=0 \right\}}$$

$$\boxed{S^{\perp}=\left\{ q(x)=a+ax\in \mathbb{P}_3(x) \ / \ a\in \mathbb{R} \right\}}$$

$q(x)=1-x^2$ polinomioaren $q'(x)$ hurbilketarik onena $S^{\perp}$ azpiespazioan, azpiespazio horrekiko bere proiekzio ortogonala da. Lehendabizi, $S^{\perp}$ azpiespazioaren oinarri bat kalkulatuko dugu:

$$\forall q(x)=a+ax\in S^{\perp}: \quad a+ax=a(1+x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{B_{S^{\perp}}=\{c(x)=1+x\}}$$

Orduan:

$$q'(x)=proy_{S^{\perp}}q(x)=proy_{c(x)}q(x)=\frac{\langle q(x), c(x)\rangle}{\langle c(x), c(x)\rangle}\cdot c(x)$$

$$\boxed{q'(x)=proy_{S^{\perp}}q(x)=\frac{\langle 1-x^2, 1+x\rangle}{\langle 1+x, 1+x\rangle}\cdot(1+x)=\frac{1}{2}(1+x)}$$

---

2. ARIKETA

A ATALA

Udako egun batean, Bilbo, Donostia eta Gazteizko hirietako tenperatura maximoen batezbestekoa 33.5 ºC izan zen. Donostian, tenperatura maximoa beste bi hiriburuetako batezbesteko tenperatura baino 4.5ºC txikiagoa izan zen. Gazteizen beste bi hiriburuetako batezbesteko tenperatura baino 6ºC handiagoa izan zen. Zein izan zen hiri bakoitzeko tenperatura maximoa? (2 puntu)

3 ezezagun dituen hiru ekuazio linealetako sistema ebatzi behar da.

Aldagaien definizioa:

- $\boxed{x}$, Bilboko tenperatura maximoa (ºC-tan)
- $\boxed{y}$, Donostiako tenperatura maximoa (ºC-tan)
- $\boxed{z}$, Gazteizko tenperatura maximoa (ºC-tan)

Sistemaren planteamendua emandako informaziotik abiatuz:

$$\boxed{S\equiv\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3}=33.5 \\ y=\dfrac{x+z}{2}-4.5 \\ z=\dfrac{x+y}{2}+6 \end{cases}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=100.5 \\ x-2y+z=9 \\ x+y-2z=-12 \end{cases}$$

Sistema ebatziz Gauss-en algoritmoa erabiliz:

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1&100.5\\1&-2&1&9\\1&1&-2&-12\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F_{i1}(-1)\ i=2,3}\begin{pmatrix}1&1&1&100.5\\0&-3&0&-91.5\\0&0&-3&-112.5\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F_i\left(-\frac{1}{3}\right)\ i=2,3}\begin{pmatrix}1&1&1&100.5\\0&1&0&30.5\\0&0&1&37.5\end{pmatrix}\sim$$

$$\underbrace{\sim}_{F_{13}(-1)}\begin{pmatrix}1&1&0&63\\0&1&0&30.5\\0&0&1&37.5\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F_{12}(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0&32.5\\0&1&0&30.5\\0&0&1&37.5\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=32.5^{\circ}\mathrm{C}\\y=30.5^{\circ}\mathrm{C}\\z=37.5^{\circ}\mathrm{C}\end{cases}}$$

B ATALA

(1.) Frogatu lengoaia sinboliko matematiko egokia erabiliz matrize baten alderantzizkoaren honako propietatea: *n* ordenako *A* matrize erregular baten irauliaren alderantzizkoa, eta *A* matrizearen alderantzizkoaren iraulia berdinak dira. (2 puntu)

Izan bedi $A\in\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrize erregularra. Honako berdinketaren frogapena eskatzen da: $\boxed{\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t}$

Izan bedi $\mathbb{I}_n$ n. ordenako identitate matrizea.

n ordenako A matrizea **erregularra** edo ez **singularra** deitzen da, n ordenako beste matrize karratu bat, A^{-1}, existitzen bada eta honakoa egiaztatzen den:

$$\boxed{A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=\mathbb{I}_n}$$

A matrizea erregularra denez, bere alderantzizkoagatik biderkatuz eskuinetik: $A\cdot A^{-1}=\mathbb{I}_n$

Atal biak irauliz: $\left(A\cdot A^{-1}\right)^t=\left(\mathbb{I}_n\right)^t\Rightarrow\left(A^{-1}\right)^t\cdot A^t=\mathbb{I}_n$

A matrizea erregularra denez, bere alderantzizkoagatik biderkatuz ezkerretik: $A^{-1}\cdot A=\mathbb{I}_n$

Atal biak irauliz: $\left(A^{-1}\cdot A\right)^t=\left(\mathbb{I}_n\right)^t\Rightarrow A^t\cdot\left(A^{-1}\right)^t=\mathbb{I}_n$

Honakoa egiaztatzen denez: $\left(A^{-1}\right)^t\cdot A^t=A^t\cdot\left(A^{-1}\right)^t=\mathbb{I}_n$

Orduan, honakoa frogatzen da: $\boxed{\left(A^{-1}\right)^t=\left(A^t\right)^{-1}}$

(2.) M lehenengo ariketako b atalean definitutako matrizea izanik, zehaztu erregularra izateko $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ parametroen balioak. Kalkulatu M^{-1} posible denean (puntu 1)

Izan bedi 1. ariketan (B ataleko 1. apartatuan) definitutako M matrizea:

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\1&-1&\alpha&-1\\1&-1&1&1\\3&\beta&1&1\end{pmatrix}}$$

Matrizea erregularra da $h(M)=4$ bada, beraz, 1. ariketan ikusi bezala $\boxed{\beta\neq-3\wedge\alpha\neq-1}$ direnean

Beraz, $\exists\, M^{-1} \in \mathbb{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ $\boxed{\beta \neq -3 \wedge \alpha \neq -1}$ direnean. *Mathematica* –ko kodean, eskatutako matrizearen alderantzizkoa M^{-1} kalkulatzen da:

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta+1}{2(\beta+3)} & 0 & \dfrac{\beta-1}{2(\beta+3)} & \dfrac{1}{\beta+3} \\ -\dfrac{1}{\beta+3} & 0 & -\dfrac{2}{\beta+3} & \dfrac{1}{\beta+3} \\ -\dfrac{1}{\alpha+1} & \dfrac{1}{\alpha+1} & 0 & 0 \\ \dfrac{1-\alpha}{2(\alpha+1)} & -\dfrac{1}{\alpha+1} & \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}$$

(3.) Kalkulu matriziala erabiliz, adierazi $q(x) = 1 - x^2$ F -ko bektoreen konbinazio lineal bezala $\beta = 1 \wedge \alpha = 0$ direnean. (2.5 puntu)

$\dim(F) = 4$ denean, F polinomio multzoa askea da, eta ondorioz, $\mathcal{L}(F) = \mathbb{P}_3(x)$; beraz, $\mathbb{P}_3(x)$ espazio bektorialeko edozein polinomio F -ko polinomioen konbinazio lineal bezala adieraz daiteke:

$$q(x) = c_1 \cdot p_1(x) + c_2 \cdot p_2(x) + c_3 \cdot p_3(x) + c_4 \cdot p_4(x) \quad \forall c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & \beta \\ -1 & \alpha & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

M 1. ariketan (B ataleko 1. Apartatuan) definitutako matrizea bada, $q(x) = 1 - x^2$ polinomioa $\mathbb{P}_3(x)$ -ko oinarri kanonikoan adierazten badugu, eta konbinazio linealeko koefizienteen matrizeari X deituz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & \beta \\ -1 & \alpha & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M^t \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kalkulu matriziala erabiliz:

$$\underbrace{\left(M^t\right)^{-1} \cdot M^t}_{\mathbb{I}_2} \cdot X = \left(M^t\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \left(M^t\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aurretik ondorioztatu denez, $\dim(F) = 4$ izango da $\boxed{\beta \neq -3 \wedge \alpha \neq -1}$ direnean, eta gainera $\boxed{\left(M^t\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^t}$; beraz, emandako *Mathematica*-ko kodea erabiliz, $\beta = 1 \wedge \alpha = 0$ direnean, honakoa daukagu:

$$\boxed{\left(M^{-1}\right)^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(M^t\right)^{-1}}$$

Garatuz:

$$\boxed{X = \left(M^t\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -1 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}}$$

(4.) Kalkulatu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parametroen balioak $p_1(x)$ eta $p_2(x)$ ren arteko angelua $\frac{\pi}{6}$ *radian* izateko (2.5 puntu)

Ohiko biderkadura eskalarra kontsideratuz: $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\langle p_1(x), p_2(x)\rangle}{\|p_1(x)\| \cdot \|p_2(x)\|}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\alpha}{2\cdot\sqrt{3+\alpha^2}}$

Garatuz: $3\left(3+\alpha^2\right) = (3-\alpha)^2 \Rightarrow 2\alpha(3+\alpha) = 0$

Orduan: $\boxed{\widehat{p_1(x), p_2(x)} = \frac{\pi}{6} \quad si \quad \alpha = 0 \vee \alpha = -3 \quad \forall \beta \in \mathbb{R}}$

---

3. ARIKETA

A ATALA

Beharrezko definizioak eta lengoaia sinboliko matematiko egokia erabiliz, justifikatu hurrengo baieztapena egia den: "*Izan bitez* $A, B \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *eta izan bedi* $\vec{v}$ *bi matrizeen bektore propio bat. Orduan,* $\vec{v}$ *ere* $2AB$ *matrizearen bektore propioa da*". (2 puntu)

λ_1, λ_2 zenbaki errealak $A, B \in \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ matrizeei elkartutako balio propioak badira, hurrenez hurren, orduan, balio eta bektore propioaren definiziotik honakoa daukagu:

$$\begin{cases} A\vec{v} = \lambda_1 \vec{v} \\ B\vec{v} = \lambda_2 \vec{v} \end{cases}$$

Baieztapena egia izateko, $(2AB)\vec{v} = \lambda\vec{v}$ berdinketa egiaztatu beharko litzateke, λ zenbaki erreala $2AB \in \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$.matrizeari elkartutako balio propioa izanik.

Konproba dezagun: $(2AB)\vec{v} = (2A)B\vec{v} = (2A)\lambda_2\vec{v} = 2\lambda_2 A\vec{v} = \underbrace{2\lambda_2\lambda_1}_{\lambda}\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Beraz, baieztapena egiazkoa da.

B ATALA

Izan bedi $A \in \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ matrize bat non:

- $\vec{u} = (1,1,1)$ bektorea $\lambda = 2$ balio propioari elkartutako bektore propioa den
- $A\cdot\vec{v} = -\vec{v} \quad \forall\vec{v} \in S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z=0\right\}$

(1.) Justifikatu arrazoituz A matrizea diagonalizagarria den. Erantzuna baiezkoa bada, diagonalizatu A matrizea. (2 puntu)

$A\cdot\vec{v} = -\vec{v}$ denez, $\boxed{\lambda_1 = -1}$ A matrizearen balio propioa da.

Enuntziatuak $\lambda_1 = -1$ balio propioari elkartutako azpiespazio propioa ematen du:

$$S = S(-1) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+z=0\right\}$$

$S(-1)$ azpiespazioaren oinarri baten lorpena:

$$\forall\vec{v}(x,y,z) \in S(-1): \quad \vec{v} = (x,y,-x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$$

$$\boxed{B_{S(-1)} = \left\{\vec{v}_1 = (1,0,-1), \vec{v}_2 = (0,1,-1)\right\}} \Rightarrow \dim S(-1) = 2$$

$\boxed{\lambda_1 = 2}$ ere, A matrizearen balio propioa dela dakigu; gainera:

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R}) \\ \dim S(-1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \dim S(2) = 1 \Rightarrow \boxed{B_{S(2)} = \left\{\vec{v}_3 = (1,1,1)\right\}}$$

Beraz, A matrizea diagonalizagarria da, matrize horri elkartutako bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialeko oinarri bat lor baitaiteke:

$$\boxed{B_\lambda = \left\{\vec{v}_1 = (1,0,-1), \vec{v}_2 = (0,1,-1), \vec{v}_3 = (1,1,1)\right\}}$$

A matrizea diagonalizagarria denez $\exists P \in \mathbb{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ *invertible* / $P^{-1}\cdot A\cdot P = D$ non:

- $\boxed{P = \left(\vec{v}_1 \mid \vec{v}_2 \mid \vec{v}_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$
- $\boxed{D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

diren.

(2.) A matrizea ortogonalki diagonalizagarria al da? Arrazoitu erantzuna. (2 puntu)

A matrizea diagonalizagarria denez $\exists P \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *alderanzgarria* / $P^{-1}\cdot A\cdot P = D$ non P eta D aurreko apartatuan definitutako matrizeak diren. Beraz:

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = D \;\Rightarrow\; A = P\cdot D\cdot P^{-1}$$

P^{-1}-en kalkulua

$$M=\left(P\,|\,\mathbb{I}_3\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\underset{F_{31}(1)}{\underbrace{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\sim$$

$$\underset{F_{32}(1)}{\underbrace{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\underset{F_3\left(\frac{1}{3}\right)}{\underbrace{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{array}\right)\underset{F_{i3}(-1)\ (i=1,2)}{\underbrace{\sim}}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{array}\right)$$

$$\boxed{P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}}$$

A-ren kalkulua:

$$A=P\cdot D\cdot P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}}$$

A matrizea simetrikoa denez ortogonalki diagonalizagarria da.

(3.) Kalkulatu A^{10}. (1.5 puntu)

$A = P\cdot D\cdot P^{-1}$ denez:

- $A^2=\left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right)\left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right)=P\cdot D\cdot\underbrace{P^{-1}\cdot P}_{\mathbb{I}_3}\cdot D\cdot P^{-1}=P\cdot D^2\cdot P^{-1}$
- $A^3=A^2\cdot A=\left(P\cdot D^2\cdot P^{-1}\right)\left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right)=P\cdot D^2\cdot\underbrace{P^{-1}\cdot P}_{\mathbb{I}_3}\cdot D\cdot P^{-1}=P\cdot D^3\cdot P^{-1}$

Prozesua errepikatuz, A^{10} honela kalkula daiteke:

$$A^{10}=P\cdot D^{10}\cdot P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Garatuz: $$\boxed{A^{10}=\begin{pmatrix}342 & 341 & 341\\ 341 & 342 & 341\\ 341 & 341 & 342\end{pmatrix}}$$

(4.) $\mathbb{I}_3$ 3. ordenako identitate matrizea izanik, lortu $p(A)=-A^3+3A+2\mathbb{I}_3$ polinomio matrizialaren balioa eta emaitza horretatik abiatuz, lortu A^{-1}. (2.5 puntu)

A matrizearen polinomio karakteristikoaren kalkulua:

$$p(\lambda)=\det\left(A-\lambda\cdot\mathbb{I}_3\right)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1+\lambda & -(1+\lambda)\end{vmatrix}=(1+\lambda)\cdot\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=(1+\lambda)\cdot\begin{vmatrix}-\lambda & 2 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-(1+\lambda)\cdot\begin{vmatrix}-\lambda & 2\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\Rightarrow\boxed{p(\lambda)=-\lambda^3+3\lambda+2\mathbb{I}_3}$$

Cayley−Hamilton-en teoremaren arabera, polinomio karakteristikoa A matrizearen polinomio deuseztatzailea da:

$$\boxed{p(A)=-A^3+3A+2\mathbb{I}_3=[0]_{3\times3}}$$

Emaitza honetatik abiatuz: $A^3-3A=A\left(A^2-3\mathbb{I}_3\right)=2\mathbb{I}_3$

Beraz: $$A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-3\mathbb{I}_3\right)\Rightarrow\boxed{A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}}$$
