ÁLGEBRA

ALJEBRA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

BUKAERAKO ARIKETA

2015–2016 Ikasturtea. Lehenengo deialdia: 2016ko urtarrilak 11

Abizenak:	***Izena:***
Ariketa hau egiteko arauak eGelan argitaratu ziren eta ikasleak ezagutu behar ditu	***Taldea:***

1. ARIKETA

Izan bedi ondorengo matrizea:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & ab+1 & -2 & -1 \\ 0 & a & 0 & -b \\ a & 0 & -a & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.) Kalkulatu *AM* matrizearen determinantea. (2 puntu)

(2.) Lortu *AM* matrizearen heina $a,b \in \mathbb{R}$ parametroen arabera. (4 puntu)

(3.) $a=-1$ eta $b=0$ izanik, *AM* matrize zabalduak definitzen duen ekuazio linealetako sistema kontsideratu. Sistema sailkatu. Lortu emandako sistemaren soluzio hurbildua, ebazteko jarraitutako prozesua azalduz. (4 puntu)

Ariketa ebazteko ondorengo kodea ematen da.

```
A = {{1, a b + 1, -2, -1}, {0, a, 0, -b}, {a, 0, -a, 0}, {1, 1, -1, 1}};
```

```
B = A /. {b → 0, a → -1};
c = Transpose[B]
```

```
{{1, 0, -1, 1}, {1, -1, 0, 1}, {-2, 0, 1, -1}, {-1, 0, 0, 1}}
```

```
u1 = c[[1]]; u2 = c[[2]]; u3 = c[[3]]; v = c[[4]];
```

```
v1 = u1;
v2 = u2 - (u2.v1)/(v1.v1) v1;
v3 = u3 - (u3.v1)/(v1.v1) v1 - (u3.v2)/(v2.v2) v2;
```

```
bo = {v1, v2, v3};
```

```
v2 = Sum[Projection[v, bo[[i]]], {i, Length[bo]}] // Simplify
```

$$\left\{-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$$

2. ARIKETA

$\mathbb{P}_2(x)$ espazio bektorialean, hau da, x aldagaiaren menpeko 2. mailako edo maila baxuagoko polinomioen espazio bektorialean, ondorengo biderkadura eskalarra definitzen da:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$$

(1.) Zehaztu $p(x)=1$ eta $q(x)=x$ polinomioek sortzen duten angelua. (2 puntu)

(2.) $a\in\mathbb{R}$ parametroaren zein balioetarako dira $p_1(x)=x-a$ eta $p_2(x)=x+a$ polinomioak ortogonalak? (1,5 puntu)

(3.) Lortu definitutako biderkadura eskalarrari $B=\{1, x, x^2\}$ oinarrian elkartutako Gram matrizea. Lortutako emaitza deskribatu. (2,5 puntu)

(4.) Kalkulatu $S=\mathcal{L}(\{1\})$ azpiespazioaren azpiespazio ortogonala. (3 puntu)

(5.) Lortu, posible bada, $p(x)\in\mathbb{P}_2(x)\ /\ p(x)\notin S \wedge p(x)\notin S^{\perp}$ betetzen duen polinomio bat.

(puntu 1)

---

3. ARIKETA

(1.) Izan bitez $A, B\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrize simetrikoak. Ondorengo adierazpena ahalik eta gehien sinplifikatu: $A^T\cdot(A-B)^T-(A-B)^2-\left(A\cdot B^T\right)^T$. (2 puntu)

(2.) Kalkulatu $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ espazio bektorialean egonik, aldi berean diagonalak eta ortogonalak diren matrize guztiak. (2 puntu)

(3.) Izan bitez $A, B\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizeak, $|A|=2$ eta $|B|=-1$ izanik.
Kalkulatu $\left|2A^T B^{-1}\right|$. (2 puntu)

(4.) Arrazoitu ondorengo baieztapenak egiak ala gezurrak diren, erantzuna justifikatuz:

(a) $B\vec{x}=2\vec{x}$ eta $AB\vec{x}=4\vec{x}$ betetzen badira, orduan 2 balioa A matrizearen balio propioa da. (puntu 1)

(b) Matrize bat diagonalizagarria bada, orduan alderanzgarria da. (puntu 1)

(5.) Izan bedi $A\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrize diagonalizagarria, bi balio propio desberdin dituena, $\lambda=5$ balio propio bakuna izanik. $|A|=20$ dela jakinda, lortu A^{-1} matrizearen balio propioak. (2 puntu)

---

4. ARIKETA

$\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ espazio bektorialean, ondoko azpiespazioak definitzen dira:

$$S=\left\{A\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})\ /\ A=A^T\right\}\qquad T=\left\{A=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})\ /\ a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

(1.) Lortu S-ren B_S oinarri bat eta bere dimentsioa adierazi. (2 puntu)

(2.) Kalkulatu T azpiespazio bektorialaren ekuazio inplizituak. (puntu 1)

(3.) Kalkulatu $S\cap T$ azpiespazio bektorialaren oinarri bat eta bere dimentsioa adierazi. (2 puntu)

(4.) Osatu S-ren B_S oinarria, $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$-ren B' oinarri bat lortu arte. (2 puntu)

(5.) Iragaite matrizearen bitartez, kalkulatu $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ matrizearen koordenatuak B' oinarrian. (3 puntu)

---

5. ARIKETA

Izan bedi ondoko baldintzak betetzen dituen $A\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ matrizea:

- $V=\left\{(x,y,0)\ /\ x,y\in\mathbb{R}\right\}$ $\lambda=1$ balio propioari elkartutako azpiespazio propioa da.
- $A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$

(1.) Arrazoitu A matrizea diagonalizagarria den. (2,5 puntu)

(2.) Lortu A matrizea. (3 puntu)

(3.) Posible al da A matrizearen bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortonormal bat lortzea? Erantzuna baiezkoa bada, adierazi oinarri hori. (1,5 puntu)

(4.) Kalkulatu A^{-1} matrizea, Cayley−Hamilton-en teorema aplikatuz. (3 puntu)
