eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

ÁLGEBRA

ALJEBRA

AZKEN ARIKETA

EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

1. ARIKETA (10 puntu)

Izan bedi ondorengo matrizea:

$$AM=\begin{pmatrix}1 & ab+1 & -2 & -1\\ 0 & a & 0 & -b\\ a & 0 & -a & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

(1.) Kalkulatu *AM* matrizearen determinantea. (2 puntu)

Errenkaden arteko edo/eta zutabeen arteko eragiketak eginez eta determinanteen propietateak aplikatuz:

$$|AM|=\begin{vmatrix}1 & ab+1 & -2 & -1\\ 0 & a & 0 & -b\\ a & 0 & -a & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{vmatrix}\underbrace{=}_{C_{31}(1)}\begin{vmatrix}1 & ab+1 & -1 & -1\\ 0 & a & 0 & -b\\ a & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=(-1)^4(-1)\begin{vmatrix}0 & a & -b\\ a & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=(-1)(-1)^3\cdot a\begin{vmatrix}a & -b\\ 1 & 1\end{vmatrix}\underbrace{=}_{C_{12}(-1)}a\begin{vmatrix}a+b & -b\\ 0 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow\boxed{|AM|=a(a+b)=a^2+ab}$$

Erabilitako notazioa:

- C_{ij} : *i.* eta *j.* zutabeak trukatu
- $C_i(\lambda)$: *i.* zutabea λ eskalarraz biderkatu
- $C_{ij}(\lambda)$: *i. zutabeari j.* zutabea λ eskalarraz biderkatu ondoren batu.

(2.) Lortu *AM* matrizearen heina $a,b\in\mathbb{R}$ parametroen arabera. (4 puntu)

Gauss-en algoritmoa aplikatuz errenkadaka baliokidea den eta heina bera duen matrize mailakatua lortzen da:

$$AM=\begin{pmatrix}1 & ab+1 & -2 & -1\\ 0 & a & 0 & -b\\ a & 0 & -a & 0\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\substack{F_{31}(-a)\\ F_{41}(-1)}}\begin{pmatrix}1 & ab+1 & -2 & -1\\ 0 & a & 0 & -b\\ 0 & -a(ab+1) & a & a\\ 0 & -ab & 1 & 2\end{pmatrix}=C\sim$$

$$\underbrace{\sim}_{F_{i1}\left(\frac{1}{a}\right)\ i=2,3\Leftrightarrow\boxed{a\neq0}}\begin{pmatrix}1 & ab+1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{b}{a}\\ 0 & -(ab+1) & 1 & 1\\ 0 & -ab & 1 & 2\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\substack{F_{42}(ab)\\ F_{32}(ab+1)}}\begin{pmatrix}1 & ab+1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{b}{a}\\ 0 & 0 & 1 & 1-b^2-\dfrac{b}{a}\\ 0 & 0 & 1 & 2-b^2\end{pmatrix}\sim$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco

ÁLGEBRA

ALJEBRA

AZKEN ARIKETA

EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

$$\underbrace{\sim}_{F_{43}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & ab+1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 1-b^2-\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1+\frac{b}{a} \end{pmatrix} = B \quad \underbrace{\sim}_{F_4\left(\frac{a}{a+b}\right) \Leftrightarrow \boxed{b \neq -a}} \begin{pmatrix} 1 & ab+1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 1-b^2-\frac{b}{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = AM'$$

Erabilitako notazioa:

- F_{ij} : *i.* eta *j.* errenkadak trukatu
- $F_i(\lambda)$: *i.* errenkada λ eskalarraz biderkatu
- $F_{ij}(\lambda)$: *i.* errenkadari *j.* errenkada λ eskalarraz biderkatu ondoren batu.

Kasu desberdinen analisia:

- $\boxed{a \neq 0 \wedge b \neq -a}$ badira, orduan $\boxed{h(AM) = h(AM') = 4}$
- $\boxed{a \neq 0 \wedge b = -a \neq 0}$ badira, orduan $\boxed{h(AM) = h(B) = 3}$. Izan ere:

$$AM \sim B = \begin{pmatrix} 1 & 1-a^2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-b^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\boxed{a = 0}$ bada
  - $\boxed{b = -a = 0}$, bada, orduan $\boxed{h(AM) = h(C') = 2}$. Izan ere:

$$AM \sim C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F_{24}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C'$$

  - $\boxed{b \neq -a}$ bada, orduan $\boxed{h(AM) = h(C'') = 3}$. Izan ere:

$$AM \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = C \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C''$$

Laburbilduz:

- $\boxed{a \neq 0 \wedge b \neq -a:\ h(AM) = 4}$
- $\boxed{a \neq 0 \wedge b = -a \neq 0:\ h(AM) = 3}$
- $\boxed{a = 0 \wedge b \neq -a:\ h(AM) = 3}$

- $\boxed{b=-a=0:\ h(AM)=2}$

(3.) $a=-1$ eta $b=0$ izanik, AM matrize zabalduak definitzen duen ekuazio linealetako sistema kontsideratu. Sistema sailkatu. Lortu emandako sistemaren soluzio hurbildua, ebazteko jarraitutako prozesua azalduz. (4 puntu)

Ariketa ebazteko ondorengo kodea ematen da.

```
A = {{1, a b + 1, -2, -1}, {0, a, 0, -b}, {a, 0, -a, 0}, {1, 1, -1, 1}};

B = A /. {b → 0, a → -1};
c = Transpose[B]
{{1, 0, -1, 1}, {1, -1, 0, 1}, {-2, 0, 1, -1}, {-1, 0, 0, 1}}

u1 = c[[1]]; u2 = c[[2]]; u3 = c[[3]]; v = c[[4]];

v1 = u1;
v2 = u2 - (u2.v1)/(v1.v1) v1;
v3 = u3 - (u3.v1)/(v1.v1) v1 - (u3.v2)/(v2.v2) v2;

bo = {v1, v2, v3};

v2 = Sum[Projection[v, bo[[i]]], {i, Length[bo]}] // Simplify
{-1, -1/3, -1/3, 2/3}
```

Emandako balioak ordezkatuz ondorengo sistema daukagu:

$$AM=\begin{pmatrix}1&1&-2&-1\\0&-1&0&0\\-1&0&1&0\\1&1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow S\equiv\begin{cases}x+y-2z=-1\\-y=0\\-x+z=0\\x+y-z=1\end{cases}$$

Sistema bateraezina da, izan ere koefiziente matrizearen eta matrize zabalduaren heina desberdinak dira.

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-1&0\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\substack{F_{31}(1)\\F_{41}(-1)}}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F_{32}(1)}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\substack{F_{43}(1)\\F_{2}(-1)}}\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&0\\0&0&-1\\\boxed{0\quad 0\quad 0}\end{pmatrix}$$

hortaz: $\boxed{h(AM)=4\neq h(A)=3}$

AM matrizearen $i.$ zutabea $\vec{c}_i\in\mathbb{R}^4\ (i=1,2,3)$ eta S sistemako gai askea (AM matrizearen laugarren zutabea) $\vec{b}\in\mathbb{R}^4$ denotatuz, ondorengo daukagu:

$$\vec{b}\notin W=\mathcal{L}(\{\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3\})\subset\mathbb{R}^4$$

S sistema bateraezinaren soluzio hurbildua lortzeko **jarraitu beharreko prozesua** karratu txikien metodoa erabiliz hurrengoa da:

- Gram−Schmidt-en metodoa aplikatuz W azpiespazioaren oinarri ortogonala lortzen da:

$$B_{OW}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$$

- $\vec{v}_1=\vec{c}_1=(1,0,-1,1)$
- $\vec{v}_2=\vec{c}_2-\dfrac{\vec{c}_2\bullet\vec{v}_1}{\vec{v}_1\bullet\vec{v}_1}\cdot\vec{v}_1=\left(\dfrac{1}{3},-1,\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$
- $\vec{v}_3=\vec{c}_3-\dfrac{\vec{c}_3\bullet\vec{v}_1}{\vec{v}_1\bullet\vec{v}_1}\cdot\vec{v}_1-\dfrac{\vec{c}_3\bullet\vec{v}_2}{\vec{v}_2\bullet\vec{v}_2}\cdot\vec{v}_2=\left(-\dfrac{3}{5},-\dfrac{1}{5},-\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5}\right)$

- $\vec{b}$ bektoreak W azpiespazioaren gainean duen proiekzio ortogonala kalkulatzen da:

$$\vec{b}'=proy_W\,\vec{b}=\sum_{i=1}^{3}proy_{\vec{v}_i}\,\vec{b}\in W=\mathcal{L}\left(\{\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3\}\right)\subset\mathbb{R}^4$$

- $\vec{b}\perp\vec{v}_1\wedge\vec{b}\perp\vec{v}_2$ direnez, orduan $proy_{\vec{v}_1}\vec{b}=proy_{\vec{v}_2}\vec{b}=(0,0,0,0)$
- $proy_{\vec{v}_3}\vec{b}=\dfrac{\vec{b}\bullet\vec{v}_3}{\vec{v}_3\bullet\vec{v}_3}\cdot\vec{v}_3=\left(-1,-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$
- hortaz: $\vec{b}'=proy_W\,\vec{b}=\sum_{i=1}^{3}proy_{\vec{v}_i}\,\vec{b}=\left(-1,-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

- S ekuazio linealetako sisteman $\vec{b}$ bektorea $\vec{b}'$ bektoreagatik ordezkatzen da, bektore honek W azpiespazioan duen hurbilketa onenagatik, hain zuzen ere. Honela, S' bateragarri zehaztua den sistema lortzen da:

$$S'\equiv A\cdot\vec{\omega}=\vec{b}'\quad non\quad \vec{\omega}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad den$$

- S' sistema ebatziz, eskatutako S sistemaren soluzio hurbildua kalkulatzen da:

$$S'\equiv A\cdot\vec{\omega}=\vec{b}'\quad\Rightarrow\quad S'\equiv\begin{pmatrix}1&1&-2\\0&-1&0\\-1&0&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad S'\equiv\begin{cases}(1):x+y-2z=-1\\(2):-y=-\dfrac{1}{3}\\(3):-x+z=-\dfrac{1}{3}\\(4):x+y-z=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}(2):-y=-\dfrac{1}{3}\\(1)+(3):-z+y=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{3}\\z=\dfrac{5}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow x=2$$

Eskatutako soluzio hurbildua $\boxed{X^*=\begin{pmatrix}2\\\frac{1}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}}$ da.

Bukatzeko, hurbilketan egindako errorea ondorengoa da:

$$\boxed{\|\vec{\varepsilon}\| = \|\vec{b} - \vec{b}'\| = \left\|\left(0, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right\| = \sqrt{\langle \vec{\varepsilon}, \vec{\varepsilon} \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.57735\, unitate}$$

Mathematica-ko kodean emandako informazioa erabiliz ariketaren ebazpena erraz daiteke, izan ere:

- *B* aldagaian $a = -1$ eta $b = 0$ direnean sistemaren matrize zabaldua, *AM* matrizea, gordeta dago.
- *c* aldagaian *B* matrizearen iraulia dago, horrela *B*-ren errenkadak ateratzea *AM*-ren zutabeak ateratzearen baliokidea izanik.
- *u1*, *u2*, *u3* eta *v* aldagaietan *AM* matrizearen lau zutabeak gordeta daude, hurrenez hurren. Hau da: $u1 = \vec{c}_1, u2 = \vec{c}_2, u3 = \vec{c}_3, v = \vec{b}$
- *bo* aldagaiak *W* azpiespazioaren oinarri ortogonal bat dauka. Izan ere, *u1*, *u2* eta *u3* bektoreei Gram−Schmidt metodoa aplikatu ondoren lortutako hiru bektoreek (*v1*, *v2* eta *v3*) sortutako zerrenda da.
- $v = \vec{b}$ bektoreak *W* azpiespazioan duen proiekzio ortogonala *v2* aldagaian gordeta dago:

$$v2 = \vec{b}' = proy_W\, \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} proy_{\vec{v}_i}\, \vec{b} = \left(-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \in W = \mathcal{L}\left(\left\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3\right\}\right) \subset \mathbb{R}^4$$

---

2. ARIKETA (10 puntu)

$\mathbb{P}_2(x)$ espazio bektorialean, hau da, x aldagaiaren menpeko 2. mailako edo maila baxuagoko polinomioen espazio bektorialean, ondorengo biderkadura eskalarra definitzen da:

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) \cdot q(x)\, dx$$

(1.) Zehaztu $p(x) = 1$ eta $q(x) = x$ polinomioek sortzen duten angelua. (2 puntu)

$$\cos\left(\widehat{p(x), q(x)}\right) = \frac{\langle p(x), q(x) \rangle}{\|p(x)\| \cdot \|q(x)\|} = \frac{\langle 1, x \rangle}{\|1\| \cdot \|x\|} = \frac{\int_0^1 x\,dx}{\sqrt{\int_0^1 dx}\sqrt{\int_0^1 x^2 dx}} = \frac{\frac{1}{2}\left(x^2\Big|_0^1\right)}{\sqrt{\left(x\Big|_0^1\right)}\sqrt{\frac{1}{3}\left(x^3\Big|_0^1\right)}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ondorioz, lortutako angelua:

$$\left(\widehat{p(x) = 1,\; q(x) = x}\right) = \frac{\pi}{6}\, rad. \equiv 30^{\circ}$$

(2.) $a \in \mathbb{R}$ parametroaren zein balioetarako dira $p_1(x) = x - a$ eta $p_2(x) = x + a$ polinomioak ortogonalak? (1,5 puntu)

$$\langle p_1(x), p_2(x)\rangle = 0 \Leftrightarrow p_1(x) \perp p_2(x) \Leftrightarrow \int_0^1 (x-a)(x+a)dx = \int_0^1 \left(x^2 - a^2\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - a^2x\right|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - a^2x\right|_0^1 = \frac{1}{3} - a^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} = \pm 0.5774$$

(3.) Lortu definitutako biderkadura eskalarrari $B = \left\{1, x, x^2\right\}$ oinarrian elkartutako Gram matrizea. Lortutako emaitza deskribatu. (2,5 puntu)

Egin beharreko kalkuluak ondorengoak dira:

$$\langle 1, 1\rangle = \int_0^1 1.1.dx = \left(x\right|_0^1 = 1$$

$$\langle 1, x\rangle = \int_0^1 1.x.dx = \tfrac{1}{2}\left(x^2\right|_0^1 = \tfrac{1}{2}$$

$$\langle 1, x^2\rangle = \int_0^1 1.x^2.dx = \tfrac{1}{3}\left(x^3\right|_0^1 = \tfrac{1}{3}$$

$$\langle x, x\rangle = \int_0^1 x.x.dx = \tfrac{1}{3}\left(x^3\right|_0^1 = \tfrac{1}{3}$$

$$\langle x, x^2\rangle = \int_0^1 x.x^2.dx = \tfrac{1}{4}\left(x^4\right|_0^1 = \tfrac{1}{4}$$

$$\langle x^2, x^2\rangle = \int_0^1 x^2.x^2.dx = \tfrac{1}{5}\left(x^5\right|_0^1 = \tfrac{1}{5}$$

Gram matrizea, matrize erreala, karratua, simetrikoa, erregularra eta definitu positiboa da:

$$G = M = \left[g_{ij}\right]_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \langle 1, 1\rangle & \langle 1, x\rangle & \langle 1, x^2\rangle \\ \langle 1, x\rangle & \langle x, x\rangle & \langle x, x^2\rangle \\ \langle 1, x^2\rangle & \langle x, x^2\rangle & \langle x^2, x^2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Emandako biderkadura eskalarra erabiliz *B* oinarriak ondorengoa betetzen duela ikus genezake:

- *B* sistema ez da ortogonala, *G* ez delako diagonala,
- *B* sisteman unitarioak ez diren bektoreak daude, diagonal nagusiko elementu guztiak bat ez direlako.

(4.) Kalkulatu $S = \mathcal{L}\left(\{1\}\right)$ azpiespazioaren azpiespazio ortogonala. (3 puntu)

$B_S = \{1\}$ *S* azpiespazioaren oinarria da, bektore ez-nulu bakar batez sortua baitago. *S* azpiespazioaren azpiespazio ortogonala edo betegarria ondorengo eran definitzen da:

$$S^{\perp} \triangleq \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_2 / p(x) \perp S \right\} = \left\{ p(x) \in \mathcal{P}_2 / p(x) \perp B_S = \left\{ q(x) = 1 \right\} \right\}$$

Ondorioz:

$$p(x) \perp B_S = \{1\} \Leftrightarrow ax^2 + bx + c \perp 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \left(ax^2 + bx + c\right) dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \right|_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$$

$$\Leftrightarrow c = -\frac{a}{3} - \frac{b}{2}$$

Hortaz, $S^{\perp}$:

$$S^{\perp} \ni p(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx + \left(-\frac{a}{3} - \frac{b}{2} \right) = a\left(x^2 - \frac{1}{3} \right) + b\left(x - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= aq_1(x) + bq_2(x) \in \mathcal{L}\left(B_{S^{\perp}}\right)$$

$B_{S^{\perp}} = \left\{ q_1(x) = x^2 - \frac{1}{3}, q_2(x) = x - \frac{1}{2} \right\}$ izanik, sistema askea da $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$ matrizearen heina $h(M) = 2$ delako, $\left|\mathbb{I}_2\right| = 1 \neq 0$ baita.

Hau da, $B_{S^{\perp}}$ $S^{\perp}$-ren oinarria da, $dim\, S^{\perp} = 2$ izanik. Ondorengo erlazioa betetzen denez, emaitza hori lortu behar zen:

$$S^{\perp} \oplus S = \mathcal{P}_2 \Leftrightarrow S^{\perp} \cap S = \left\{ 0x^2 + 0x + 0 \right\} \Leftrightarrow dim\, S^{\perp} + \dim S = 2 + 1 = 3 = \dim \mathcal{P}_2$$

(5.) Lortu, posible bada, $p(x) \in \mathbb{P}_2(x) \,/\, p(x) \notin S \wedge p(x) \notin S^{\perp}$ betetzen duen polinomio bat.(puntu 1)

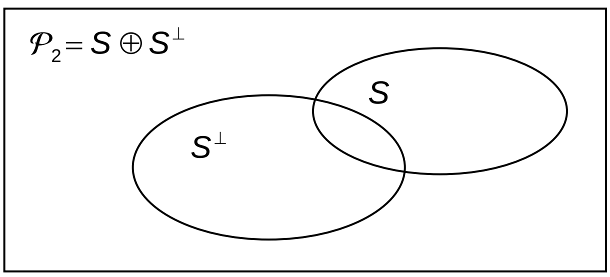
Baldintza horiek betetzen dituen polinomioa existitzen da, polinomio hori lortzeko nahikoa da $p(x) = s(x) + r(x) \in S \oplus S^{\perp} = \mathcal{P}_2(x)$ non $s(x) \in S - \{0\} \wedge r(x) \in S^{\perp} - \{0\}$ betetzen dituen polinomio bat aukeratzea. Adibidez, izan bedi ondoko polinomioa:

$$\boxed{p(x) = q(x) + q_2(x) = 1 + \left(x - \frac{1}{2} \right) = x + \frac{1}{2} \in \mathcal{P}_2}$$

Ondorengoa daukagu:

- $p(x) = x + \frac{1}{2} \notin S = \mathcal{L}(\{1\})$, ez delako $q(x) = 1$ polinomioaren proportzionala.
- $p(x) = x + \frac{1}{2} \notin S^{\perp} = \mathcal{L}\left(\left\{ q_1(x) = x^2 - \frac{1}{3}, q_2(x) = x - \frac{1}{2} \right\} \right)$,

$$\left\langle 1, p(x) = x + \frac{1}{2} \right\rangle = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right|_0^1 = 1 \neq 0 \text{ betetzen baita.}$$



3. ARIKETA (10 puntu)

(1.) Izan bitez $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrize simetrikoak. Ondorengo adierazpena ahalik eta gehien sinplifikatu: $A^T \cdot (A-B)^T - (A-B)^2 - \left(A \cdot B^T\right)^T$. (2 puntu)

$$E = A^T \cdot (A-B)^T - (A-B)^2 - \left(A\cdot B^T\right)^T \underbrace{=}_{(1)} A^T \cdot \left(A^T - B^T\right) - (A^2 + B^2 - AB - BA) - B \cdot A^T$$

$$(1): \begin{cases} (A-B)^T = A^T - B^T \\ (A-B)^2 = (A^2 + (-B)(-B) + A(-B) + (-B)A = A^2 + B^2 - AB - BA \\ \left(A \cdot B^T\right)^T = \left(B^T\right)^T \cdot A^T \\ \left(B^T\right)^T = B \end{cases}$$

Matrizeen arteko biderketa batuketarekiko banakorra dela erabiliz eta A eta B matrizeak simetrikoak direla kontuan izanik, $A = A^T$ eta $B = B^T$:

$$E = A^T A^T - A^T B^T - A^2 - B^2 + AB + BA - B \cdot A^T = A^2 - AB - A^2 + AB + BA - B^2 - BA = -B^2$$

$$\boxed{E = -B^2}$$

(2) Kalkulatu $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ espazio bektorialean egonik, aldi berean diagonalak eta ortogonalak diren matrize guztiak. (2 puntu)

$$\left.\begin{array}{l} A \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \text{ diagonala} \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22}\end{pmatrix} \\ A \in \mathcal{O}_{2\times2}(\mathbb{R}) \text{ ortogonala} \Leftrightarrow A^{-1}=A^T \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & d_{22}^{-1}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} d_{11} = d_{11}^{-1} \\ d_{22} = d_{22}^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_{11} = \pm 1 \\ d_{22} = \pm 1 \end{cases}$$

Izan ere $A=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22}\end{pmatrix} = A^T$ eta $A^{-1}=\begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22}\end{pmatrix} = \dfrac{A^\dagger}{|A|} = \dfrac{1}{d_{11}\cdot d_{22}}\begin{pmatrix} d_{22} & 0 \\ 0 & d_{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & d_{22}^{-1}\end{pmatrix}$.

Hau da, lau posibilitate daude:

$$\boxed{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}}$$

(3.) Izan bitez $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizeak, $|A| = 2$ y $|B| = -1$ izanik.

ÁLGEBRA

ALJEBRA

AZKEN ARIKETA

EBAZPENA

euskal herriko unibertsitatea / universidad del país vasco
INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

Kalkulatu $\left|2A^TB^{-1}\right|$. (2 puntu)

Matrize baten eta bere irauliaren determinanteak bat datozenez, eta erregularra den matrize baten alderantzizko matrizearen determinantea, matrizearen determinantearen alderantzizkoa denez, ondorengo daukagu:

$$\boxed{\left|2A^TB^{-1}\right|=2^n\left|A^T\right|\left|B^{-1}\right|=2^n\left|A\right|\left|B\right|^{-1}=2^n\frac{2}{-1}=-2^{n+1}}$$

(4.) Arrazoitu ondorengo baieztapenak egiak ala gezurrak diren, erantzuna justifikatuz:

(a) $B\vec{x}=2\vec{x}$ eta $AB\vec{x}=4\vec{x}$ betetzen badira, orduan 2 A matrizearen balio propioa da.(1 puntu)

Egia da. Egin beharreko eragiketa matrizialak $AB\vec{x}=4\vec{x}$, egin ahal izateko $A,B\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ izan behar dira.
$B\vec{x}=2\vec{x}$ denez, $4\vec{x}=AB\vec{x}=A(B\vec{x})=A(2\vec{x})=2A\vec{x}\Rightarrow A\vec{x}=2\vec{x}$ daukagu, hortaz, 2 A matrize erreal karratuaren autobalioa (balio propioa edo balio karakteristikoa) da: $\boxed{A\vec{x}=2\vec{x}}$.

(b) Matrize bat diagonalizagarria bada, orduan alderanzgarria da. (1 puntu)

Gezurra da. Izan bedi $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrize erreal karratu diagonalizagarria, hau da, $\exists P\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\,/\,D=P^{-1}\cdot A\cdot P$ (D matrize diagonala, A matrizearen balio propioak erabiliz definitutako matrize diagonala izanik), ondorioz, A eta D matrize antzekoak dira. Demagun $\lambda=0$ A matrizearen balio propioa dela, honek A matrizea singularra dela esan nahi du, ondorioz A ez da alderanzgarria. Hortaz, matrize erreal karratua diagonalizagarria izan daiteke, alderanzgarria izan gabe.

(5.) Izan bedi $A\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrize diagonalizagarria, bi balio propio desberdin dituena, $\lambda=5$ balio propio bakuna izanik. $|A|=20$ dela jakinda, lortu A^{-1} matrizearen balio propioak. (2 puntu)

Izan bedi 3. ordenako A matrize karratu erreal diagonalizagarria. Balio propio bikoitza λ_2 denotatuz

$$\exists\, P\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})\,/\,D=P^{-1}\cdot A\cdot P\Leftrightarrow|D|=|A|=20=5\times\lambda_2^2\Leftrightarrow\lambda_2=\pm 2\,.$$

Bestalde, A matrizea erregularra denez, bere alderantzizko matrizeak $A\cdot X=\lambda X\Leftrightarrow A^{-1}\cdot X=\lambda^{-1}X$ betetzen du, hortaz, bi kasu desberdin daude:

- 1. kasua. $\boxed{\lambda_1=0.2\,(k_1=1),\,\lambda_2=0.5\,(k_2=2)}$
- 2. kasua. $\boxed{\lambda_1=0.2\,(k_1=1),\,\lambda_2=-0.5\,(k_2=2)}$

---

4. ARIKETA (10 puntu)

$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ espazio bektorialean, ondoko azpiespazioak definitzen dira:

$$S = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, A = A^T \right\} \qquad T = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(1.) Lortu S-ren B_S oinarri bat eta bere dimentsioa adierazi. (2 puntu)

Izan bedi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in S$ matrize karratu erreal simetrikoa. Orduan:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow S = \mathcal{L}(B_S)$$

$$\boxed{B_S = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Itxidura lineala $\mathcal{L}(.)$ azpiespazio bektoriala denez eta $S = \mathcal{L}(B_S)$ betetzen denez, S $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ko azpiespazio bektoriala dela ondorioztatzen da. Horretaz gain, B_S S-ren sistema sortzaile askea da, izan ere M matrizeak hurrengoa betetzen du:

$$h(M) = h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = |B_S|$$

1., 2. eta 4. zutabeen determinantea $|\mathbb{I}_3| = 1 \neq 0$ delako. Ondorioz, B_S S-ren oinarria da eta $\boxed{dim\ S = 3}$.

(2.) Kalkulatu T azpiespazio bektorialaren ekuazio inplizituak. (puntu 1)

$$T = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} / \, a, b \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} / \, a_{11} = a_{22} = a \in \mathbb{R} \wedge a_{12} = -a_{21} = b \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow \boxed{T = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} / \, a, b \in \mathbb{R} \right\}}$$

(1.) ataleko prozesua jarraituz ondokoa daukagu

$$T = \mathcal{L}(B_T) \,/\, \boxed{B_T = \left\{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

Ondorioz, B_T T-ren oinarri bat da (T $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ren azpiespazio bektoriala izanik) eta $\boxed{\dim T = 2}$.

(3.) Kalkulatu $S \cap T$ azpiespazio bektorialaren oinarri bat eta bere dimentsioa adierazi. (2 puntu)

$$X \in S \cap T \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{cases} (1): X \in S = \mathcal{L}(B_S) \\ \wedge \\ (2): X \in T = \mathcal{L}(B_T) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1): a_{12} = a_{21} \\ \wedge \\ (2): a_{11} = a_{22} \ \wedge \ a_{12} = -a_{21} \end{cases}$$

ÁLGEBRA

ALJEBRA

AZKEN ARIKETA

EBAZPENA

$$X \underbrace{=}_{(1)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \underbrace{=}_{(2)} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow S \cap T = \mathcal{L}\left(B_{S\cap T}\right) \,/\, \boxed{B_{S\cap T} = \left\{ C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

$C_1 \neq [0]_{2\times 2}$ denez, $B_{S\cap T}$ sistema askea da. Hortaz, $B_{S\cap T}$ $S\cap T$-ren oinarria da $\boxed{\dim(S\cap T)=1}$ izanik.

(4.) Osatu *S*-ren B_S oinarria, $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ren B' oinarri bat lortu arte. (2 puntu)

Ondorengo eran definitutako B' multzoa

$$\boxed{B' = B_S \cup B_1 = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ren oinarria da, $|B'| = \dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$ delako eta

$$h(M) = h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4$$

betetzen delako, izan ere:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

(5.) Iragaite matrizearen bitartez, kalkulatu $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen koordenatuak B' oinarrian. (3 puntu)

Oinarri kanonikoa eta lortutako *B'* oinarriak erabiliz:

- $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ren B_K oinarri kanonikoa:

$$B_K = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- lortutako B' oinarria:

$$B' = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Lehenengo eta behin, M_1 matrizea, B_K-tik B'-rako iragaite matrizea kalkulatzen da, horretarako B_K oinarriko matrizeek B' oinarrian dituzten koordenatuak kalkulatuz. Hau da:

AZKEN ARIKETA

EBAZPENA

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

$$E_i = \alpha_{i1} \cdot A_1 + \alpha_{i2} \cdot A_2 + \alpha_{i3} \cdot A_3 + \alpha_{i4} \cdot A_4 = \begin{pmatrix} \alpha_{i1} & \alpha_{i2} + \alpha_{i4} \\ \alpha_{i2} & \alpha_{i3} \end{pmatrix} \in B_K \quad \forall i \in [1, 4]$$

$(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}, \alpha_{i4})$ E_i matrizeak B' oinarrian dituen koordenatuak izanik. Prozesua pausuz pausu eginez:

$$E_1 = \alpha_{11}A_1 + \alpha_{12}A_2 + \alpha_{13}A_3 + \alpha_{14}A_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{14}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow E_1 : \begin{cases} \alpha_{11} = 1 \\ \alpha_{12} + \alpha_{14} = 0 \\ \alpha_{12} = 0 \\ \alpha_{13} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow E_1 : \begin{cases} \alpha_{11} = 1 \\ \alpha_{14} = 0 \\ \alpha_{12} = 0 \\ \alpha_{13} = 0 \end{cases}$$

$$E_2 = \alpha_{21}A_1 + \alpha_{22}A_2 + \alpha_{23}A_3 + \alpha_{24}A_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_{21}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{22}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{24}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow E_2 : \begin{cases} \alpha_{21} = 0 \\ \alpha_{22} + \alpha_{24} = 1 \\ \alpha_{22} = 0 \\ \alpha_{23} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow E_2 : \begin{cases} \alpha_{21} = 0 \\ \alpha_{24} = 1 \\ \alpha_{22} = 0 \\ \alpha_{23} = 0 \end{cases}$$

$$E_3 = \alpha_{31}A_1 + \alpha_{32}A_2 + \alpha_{33}A_3 + \alpha_{34}A_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_{31}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{32}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{33}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{34}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow E_3 : \begin{cases} \alpha_{31} = 0 \\ \alpha_{32} + \alpha_{34} = 0 \\ \alpha_{32} = 1 \\ \alpha_{33} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow E_3 : \begin{cases} \alpha_{31} = 0 \\ \alpha_{34} = -1 \\ \alpha_{32} = 1 \\ \alpha_{33} = 0 \end{cases}$$

$$E_4 = \alpha_{41}A_1 + \alpha_{42}A_2 + \alpha_{43}A_3 + \alpha_{44}A_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \alpha_{41}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{42}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_{43}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_{44}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow E_4 : \begin{cases} \alpha_{41} = 0 \\ \alpha_{42} + \alpha_{44} = 0 \\ \alpha_{42} = 0 \\ \alpha_{43} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow E_3 : \begin{cases} \alpha_{41} = 0 \\ \alpha_{44} = 0 \\ \alpha_{42} = 0 \\ \alpha_{43} = 1 \end{cases}$$

Hortaz, M_1 B_K -tik B' -rako iragaite matrizea hurrengoa dela ondorioztatzen da:

$$\boxed{M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Aurreko informazioa kontuan izanik:

AZKEN ARIKETA

EBAZPENA

$$\boxed{H=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}}$$

Ondoko konbinazio lineala betetzen da:

$$C=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}=1\times\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\times\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+(-1)\times\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+2\times\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Koordenatuak lortzeko beste era bat, enuntziatuan eskatzen ez den era bat, ondorengo konbinazio lineala askatzea da:

$$C=\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\cdot A_i\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

Parametro gabeko lau ekuazio eta lau ezezagun dituen sistema bateragarri zehaztu ez-homogeneoa ebatziz, hurrengoa daukagu:

$$\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2+\alpha_4\\\alpha_2&\alpha_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\alpha_1=1\\\alpha_2=0\\\alpha_3=-1\\\alpha_4=2\end{matrix}$$

Era berdintsuan, M_2 matrizea, B'-tik B_K-rako iragaite matrizea kalkula daiteke, horretarako B' oinarriko matrizeek B_K oinarrian dituzten koordenatuak kalkulatuz. Hau da:

$$A_i=\beta_{i1}E_1+\beta_{i2}E_2+\beta_{i3}E_3+\beta_{i4}E_4=\begin{pmatrix}\beta_{i1}&\beta_{i2}\\\beta_{i2}&\beta_{i4}\end{pmatrix}\in B',\ \forall i\in[1,4]$$

$(\beta_{i1},\beta_{i2},\beta_{i3},\beta_{i4})$ A_i matrizeak B_K oinarrian dituen koordenatuak izanik. Prozesua pausuz pausu eginez:

$$A_1=\beta_{11}E_1+\beta_{12}E_2+\beta_{13}E_3+\beta_{14}E_4\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\beta_{11}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\beta_{12}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\beta_{13}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\beta_{14}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A_1:\begin{cases}\beta_{11}=1\\\beta_{12}=0\\\beta_{13}=0\\\beta_{14}=0\end{cases}$$

$$A_2=\beta_{21}E_1+\beta_{22}E_2+\beta_{23}E_3+\beta_{24}E_4\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\beta_{21}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\beta_{22}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\beta_{23}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+\beta_{24}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A_2:\begin{cases}\beta_{21}=0\\\beta_{22}=1\\\beta_{23}=1\\\beta_{24}=0\end{cases}$$

$$A_3 = \beta_{31}E_1 + \beta_{32}E_2 + \beta_{33}E_3 + \beta_{34}E_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \beta_{31}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_{32}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_{33}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_{34}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A_3 : \begin{cases} \beta_{31} = 0 \\ \beta_{32} = 0 \\ \beta_{33} = 0 \\ \beta_{34} = 1 \end{cases}$$

$$A_4 = \beta_{41}E_1 + \beta_{42}E_2 + \beta_{43}E_3 + \beta_{44}E_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \beta_{41}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_{42}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta_{43}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta_{44}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A_1 : \begin{cases} \beta_{41} = 0 \\ \beta_{42} = 1 \\ \beta_{43} = 0 \\ \beta_{44} = 0 \end{cases}$$

Hortaz, M_2 B'-tik B_K-rako iragaite matrizea hurrengoa dela ondorioztatzen da:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

$M_2 = M_1^{-1}$ erlazioa (erraz froga daitekeena) betetzen delarik.

---

5. ARIKETA (10 puntu)

Izan bedi ondoko baldintzak betetzen dituen $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrizea:

- $V = \{(x,y,0) \; / \; x,y \in \mathbb{R}\}$, $\lambda = 1$ balio propioari elkartutako azpiespazio propioa.

  Hau da:

$$V = V(1) = \{(x,y,0) = x(1,0,0) + y(0,1,0) \; / \; x,y \in \mathbb{R}\}$$

$$\boxed{V(1) = \mathcal{L}(F_1) \; / \; F_1 = \{\vec{u}_1 = (1,0,0), \vec{u}_2 = (0,1,0)\}}$$

- $$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = 3X \Leftrightarrow \boxed{V(3) = \mathcal{L}(F_2) \; / \; F_2 = \{\vec{u}_3 = (1,1,2)\}}$$

Ondorioz, matrize karratu errealari buruzko ondoko informazio daukagu:

i	λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$	d_i

ÁLGEBRA

ALJEBRA
AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

1	1	2	$\mathcal{L}\left(\left\{\vec{u}_1=(1,0,0),\vec{u}_2=(0,1,0)\right\}\right)$	2
2	3	1	$\mathcal{L}\left(\left\{\vec{u}_3=(1,1,2)\right\}\right)$	1

(1.) Arrazoitu A matrizea diagonalizagarria den. (2,5 puntu)

Bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat existitzen denez, A matrizea *diagonalizagarria* da.

$$\boxed{B=\left\{\vec{u}_1=(1,0,0),\vec{u}_2=(0,1,0),\vec{u}_3=(1,1,2)\right\}}$$

$Card\ B=|B|=\dim\mathbb{R}^3=3$ da, B sistema askea delako, izan ere:

$$h(M)=h\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&2\end{pmatrix}=3;\qquad \begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&2\end{vmatrix}=2\neq 0 \text{ baita}$$

Matrizea behe-triangeluarra denez, bere determinantea diagonal nagusiko elementuen biderkadura da. B bektore propioz osatutako oinarri bat izatea, diagonalizagarria izateko bete beharreko ondorengo baldintzak betetzearen baliokidea da:

$$\begin{aligned}k_1+k_2&=2+1=3=n\\k_1&=d_1=2\\k_2&=d_2=1\end{aligned}$$

(2.) Lortu A matrizea. (3 puntu)

Izan bedi A ondoko eran definitutako 3. ordenako matrize erreal karratua $A\triangleq\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$,

(1.) atalean lortutako balio propioei, balio propio eta bektore propioen definizioa, $AX=\lambda X$, aplikatuz ondorengo emaitzak ditugu:

$$\left.\begin{array}{l}A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{11}=1\\a_{21}=a_{31}=0\end{cases}\\[2ex] A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{22}=1\\a_{12}=a_{32}=0\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a_{33}=3\\a_{13}=a_{23}=1\end{cases}$$

Hortaz, bilatzen ari garen A matrizea ondokoa da:

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}}$$

Bestalde, A matrizea diagonalizagarria denez hurrengo eran ere kalkula daiteke:

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = D \Leftrightarrow A = P\cdot D\cdot P^{-1}$$

non $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix} \wedge P=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ diren.

(3.) Posible al da A matrizearen bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ren oinarri ortonormal bat lortzea? Erantzuna baiezkoa bada, adierazi oinarri hori. (1,5 puntu)

A matrizea simetrikoa ez denez, A ezin daiteke ortogonalki diagonalizatu, eta ondorioz, ezinezko da A matrizearen bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri ortonormal bat lortzea.

Hala ere, A matrizea diagonalizagarria denez, bektore propioz osatutako oinarri bat dugu (B bektore sistema, hain zuzen ere), ondorioz, sistema aske bat daukagu. Hortaz, Gram−Schmidt-en ortogonalizazio metodoa aplikatuz eta ortonormalizatuz bektore sistema ortonormal bat lortuko genuke. Baina, horrela lortutako bektore sistema bektore propioz osatuta ez dagoela erraz froga daiteke.

Aipatutako bi pausuak aplikatuz $B_{OG}=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ bektore sistema lortzen dugu $\mathcal{L}(B)=\mathcal{L}(B_{OG})$ betetzen delarik. B bektore sistema ez da bektore sistema ortogonala, $\mathbb{R}^3$-ko ohiko biderkadura eskalarra erabiliz, izan ere:

- $\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle=0$
- $\langle\vec{u}_1,\vec{u}_3\rangle=\langle(1,0,0),(1,1,2)\rangle=1\neq 0$
- $\langle\vec{u}_2,\vec{u}_3\rangle=\langle(0,1,0),(1,1,2)\rangle=1\neq 0$

Ortogonalizazio algoritmoa aplikatuz:

- $\vec{v}_1=\vec{u}_1=(1,0,0)$; $\|\vec{v}_1\|^2=\langle\vec{v}_1,\vec{v}_1\rangle=1$
- $\vec{v}_2=\vec{u}_2-\dfrac{\langle\vec{v}_1,\vec{u}_2\rangle}{\|\vec{v}_1\|^2}\cdot\vec{v}_1=\vec{u}_2=(0,1,0)$; $\|\vec{v}_2\|^2=\langle\vec{v}_2,\vec{v}_2\rangle=1$
- $\vec{v}_3=\vec{u}_3-\dfrac{\langle\vec{v}_1,\vec{u}_3\rangle}{\|\vec{v}_1\|^2}\cdot\vec{v}_1-\dfrac{\langle\vec{v}_2,\vec{u}_3\rangle}{\|\vec{v}_2\|^2}\cdot\vec{v}_2=\vec{u}_3-\vec{v}_1-\vec{v}_2=(0,0,2)$; $\|\vec{v}_3\|^2=\langle\vec{v}_3,\vec{v}_3\rangle=4$

Eta ortonormalizatuz, $\mathcal{L}(B)=\mathcal{L}(B_{OG})=\mathcal{L}(B_{ON})$:

$$B_{ON}=\left\{\vec{w}_1=\frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}=(1,0,0),\ \vec{w}_2=\frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}=(0,1,0),\ \vec{w}_3=\frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|}=(0,0,1)\right\}$$

baina $\vec{w}_3$ bektoreak ez du bektore propioa izateko baldintza betetzen, izan ere:

$$A\vec{w}_3=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\neq 3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

(4.) Kalkulatu A^{-1} matrizea, Cayley−Hamilton teorema aplikatuz. (3 puntu)

A matrizearen polinomio karakteristikoa:

$$p(\lambda_A) \triangleq |A - \lambda \cdot \mathbb{I}_3| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (3-\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3$$

Honi esker, $|A| = 3 \neq 0$ denez, $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ matrizea erregularra dela froga daiteke. Hortaz, Cayley−Hamilton-en teorema aplikatuz, ondorengoa ondoriozta daiteke:

$$p(A) = -A^3 + 5A^2 - 7A + 3\mathbb{I}_3 = [0]_{3\times3} \Leftrightarrow$$

$$\mathbb{I}_3 = A\left[\left(A^2 - 5A + 7\mathbb{I}_3\right)\frac{1}{3}\right] \Leftrightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\left(A^2 - 5A + 7\mathbb{I}_3\right)$$

A^2 kalkulatuz eta bere balioa lortutako azken adierazpenean ordezkatuz:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_3$ betetzen dela erraz frogatzen da.