AZKEN ARIKETA (%100)

EBAZPENA

2015–2016 ikasturtea. 2.deialdia: 2016.eko ekainaren 30ean

Abizenak:	
Izena:	***Taldea:***
Ariketa hau egiteko arauak eGelan argitaratu ziren eta ikasleak ezagutu behar ditu.	

1. ARIKETA

A ZATIA

Ondoko kalkulu segmentua kontutan hartuz, erantzun arrazoituz proposatzen diren galderei:

```
u={0,1,0,-1};v={0,0,1,-1};
e1={1,0,0,0};e2={0,0,2,1};x={1,2,3,4};
Solve[m u+n v=={0,0,0,0},{m,n}]
```

$\{\{m \to 0,\ n \to 0\}\}$

```
Solve[a u+b v+c e1+d e2=={0,0,0,0},{a,b,c,d}]
```

$\{\{a \to 0,\ b \to 0,\ c \to 0,\ d \to 0\}\}$

```
Reduce[a u+b v+c e1+d e2=={1,2,3,4},{a,b,c,d}]
```

$a = 2 \wedge b = -3 \wedge c = 1 \wedge d = 3$

(1.) Kalkulatu B oinarri bat eta $S = \mathcal{L}(\{u,v\})$-ren dimentsioa. (0.5 puntu)

`Solve` aginduaren bidez eta dagokion irteera egiaztatzen da $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreak linealki independenteak direla:

```
Solve[m u+n v=={0,0,0,0},{m,n}]
```

$\{\{m \to 0,\ n \to 0\}\}$

$S = \mathcal{L}(\{\vec{u}, \vec{v}\})$ denez, S-ren sistema sortzailea eta askea lortu da, orduan bi bektoreek S-ren oinarri bat osatzen dute:

$$\boxed{B = \{\vec{u}, \vec{v}\} \Rightarrow \dim S = 2}$$

(2.) Osatu B oinarria $\mathbb{R}^4$-ren B^* oinarri bat lortu arte (0.5 puntu)

$\mathbb{R}^4$-ren oinarri bat 4 bektore independentez osatuta egon behar da, $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ izateagatik. B oinarria osatzeko $\vec{u}$ eta $\vec{v}$ bektoreak B^* oinarriaren barnean daude.

$\mathbb{R}^4$-ko $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{e}_1$ eta $\vec{e}_2$ bektoreak independenteak direla egiaztatzen da ondoko `Solve` aginduaren bidez eta dagokion irteera

Orduan $\boxed{B^* = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}}$ da eskatutako oinarria.:

(3.) Kalkulatu B*-ren oinarrian $\bar{x} = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$ bektorearen koordenatuak (0.5 puntu)

Reduce aginduan $\vec{x} = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$ bektorea B^* oinarriko bektoreen konbinazio linealaren bidez adierazten da, beraz bere irteera $\vec{x}$ bektorearen koordenatuak dira:

```
Reduce[a u+b v+c e1+d e2=={1,2,3,4},{a,b,c,d}]
```

$a = 2 \wedge b = -3 \wedge c = 1 \wedge d = 3$

$$\boxed{\vec{x}_{/B^*} = (2,\ -3,\ 1,\ 3)}$$

(4.) Kalkulatu $h\left(\{\bar{u},\ \bar{v},\ \bar{e}_1\}\right)$ (0.5 puntu)

(5.)

$B = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ sistema askea denez, orduan $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}$ sistema askea ere bada:

$$\boxed{h\left(\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}_1\}\right) = 3}$$

B ZATIA

$\mathbb{R}^3$ espazio bektorialean ondoko zuzenak kontsideratzen dira:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + by + 2z = 2 \end{cases}$$

(1) Aztertu *(r, s)* ekuazio sistema multzoaren bateragarritasuna $a, b \in \mathbb{R}$ parametroen balio desberdinen arabera. (4 puntu)

(r, s) ekuazio sistema multzoaren A koefiziente matrizea eta AM matrize zabaldua ondokoak dira:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & b & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times3}(\mathbb{R}) \qquad AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{R})$$

AM -ren errenkaden artean oinarrizko eragiketak eginez:

$$AM \underbrace{\sim}_{\substack{E_2 \to E_2 - 2E_1 \\ E_3 \to E_3 - aE_1 \\ E_4 \to E_4 - E_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & b-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = AM'$$

AM matrizea eta AM' matrizea baliokideak dira, orduan heina bera dute.

$$\boxed{AM \sim AM' \;\Rightarrow\; h(AM) = h(AM')}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & b-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ b-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{=}_{Z_2 \to Z_2 - Z_3} (a-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ b-1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b-1 & 1 \end{vmatrix} = (1-a)\cdot(2-b)$$

1.kasuan $a \neq 1 \wedge b \neq 2\, badira \Rightarrow h(AM) = 4 \neq h(A) = 3$ $\Rightarrow$ Sistema bateraezina

2.kasuan $a = 1$ bada$\Rightarrow$

$$AM \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{E_4 \to E_4 + E_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\boxed{a = 1 \wedge b \neq 4\; badira}$ $\Rightarrow \boxed{h(AM) = 3 = h(A) = ezezagun\, kopurua}$ $\Rightarrow$ Sistema bateragarri determinatua.

- $\boxed{a = 1 \wedge b = 4\; badira}$ $\Rightarrow h(AM) = 3 \neq h(A) = 2$ $\Rightarrow$ Sistema bateraezina.

3.kasuan $b = 2$ bada$\Rightarrow$

$$AM \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{E_4 \to E_4 + E_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{E_3 \leftrightarrow E_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \end{pmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ denez $\Rightarrow$ $\boxed{h(AM) = 3 = h(A) = ezezagun\, kopurua}$ $\Rightarrow$ Sistema bateragarri determinatua.

- $b = 2 \;\; \forall a \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Sistema bateragarri determinatua.

Laburbilduz,

Kasua	Parametroa	h(***A***)	h(***AM***)	Sailkapena
1	$a \neq 1 \wedge b \neq 2$	3	4	BATERAEZINA
2	$a = 1 \wedge b = 4$	2	3	BATERAEZINA
3	$(a = 1 \wedge b \neq 4) \vee b = 2 \;\; \forall a \in \mathbb{R}$	3	3	BATERAGARRI DETERMINATUA

(2) Interpretatu geometrikoki lortutako emaitza desberdinak (2 puntu)

Sistema bateragarri determinatua denean zuzenek elkar ebakitzen dute puntu batean. Baina sistema bateraezina denean, zuzenek elkar gurutzatzen dute edo paraleloak dira. Kasu hauek desberdintzeko zuzenen norabide bektoreak kalkulatzen dira.

- $$r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x-y+z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_{1r}(1,1,1) \\ \vec{n}_{2r}(2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \vec{d}_r = \vec{n}_{1r} \times \vec{n}_{1r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{d}_r = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{d}_r\right)_{\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}} = (2,1,-3)}$$

- $$s \equiv \begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+by+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{n}_{1s}(a,1,1) \\ \vec{n}_{2s}(1,b,2) \end{cases} \Rightarrow \vec{d}_s = \vec{n}_{1s} \times \vec{n}_{1s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 1 & 1 \\ 1 & b & 2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{d}_r = (2-b)\vec{i} + (1-2a)\vec{j} + (ab-1)\vec{k} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{d}_s\right)_{\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}} = (2-b, 1-2a, ab-1)}$$

Norabide bektoreekin D matrizea eraikitzen da

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2-b \\ 1 & 1-2a \\ -3 & ab-1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1-2a \\ 2 & 2-b \\ -3 & ab-1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 + 3F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1-2a \\ 0 & 4a-b \\ 0 & 2+ab-6a \end{pmatrix}$$

D matrizearen heina kalkulatzen da, a, b parametroen arabera:

$h(D)=1$ izateko $|1| \neq 0$ minorea osatuz 2×2 minore ditugu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1-2a \\ 0 & 4a-b \end{vmatrix} = 4a-b=0 \ eta \ \begin{vmatrix} 1 & 1-2a \\ 0 & 2+ab-6a \end{vmatrix} = 2+ab-6a=0$$

- $$\begin{cases} b=4a \\ 2+ab-6a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=4a \\ 2a^2-3a+1=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} a=1 \quad \Rightarrow b=4 \Rightarrow h(D)=1 \\ \qquad \vee \\ a=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow b=2 \, ezinezkoa \end{cases}}$$

Beraz, $a=1 \wedge b=4$ direnean zuzenak paraleloak dira.

$a=\frac{1}{2} \Rightarrow b=2$ kasua ezinezkoa da, zuzen baten norabide bektorea ezin delako $\left(\vec{d}_s\right)=(0,0,0)$ bektore nulua izan.

$a \neq 1 \wedge b \neq 2$ direneanzuzenek elkar gurutzatzen dute.

(3) Existitzen diren kasuetan, dagozkien ebakidurak kalkulatu. (2 puntu)

- $\boxed{a=1 \wedge b \neq 4 \ badira}$

$$AM \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\sim}_{E_4 \to E_4 + E_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beraz, ekuazio sistema baliokidea ondokoa da:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -3x-z=0 \\ (b-4)y=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{b-4} \Rightarrow z=-3y=\dfrac{-3}{b-4} \Rightarrow x=1-y-z=\dfrac{b-2}{b-4} \end{cases}$$

$$\boxed{a=1 \wedge b\neq 4: \quad r \cap s \equiv P\left(\frac{b-2}{b-4}, \frac{1}{b-4}, \frac{-3}{b-4}\right)}$$

- $\boxed{b=2 \quad \forall a \in \mathbb{R}}$

$$AM \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beraz, ekuazio sistema baliokidea ondokoa da:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ -3x-z=0 \\ (1-a)y+(1-a)z=(1-a) \\ -2y=0 \Rightarrow y=\dfrac{-1}{2} \Rightarrow z=-3y=\dfrac{3}{2} \Rightarrow x=1-y-z=0 \end{cases}$$

$$\boxed{b=2 \quad \forall a \in \mathbb{R}: \quad r \cap s \equiv P\left(0, \frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right)}$$

2. ARIKETA

A ZATIA

Izan bedi $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrizea. Antzekotasunez diagonalizagarria al da? Ortogonalki ezin dela diagonalizatu justifikatzeko, **gutxienez** bi arrazoi eman. (4 puntu)

A matrizearen **polinomio karakteristikoa kalkulatzen da**:

$$p_A(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 1 & 0 & 0\\ -1 & 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\underbrace{=}_{C_{12}(-1)}\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0 & 0\\ -2+\lambda & 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$\underbrace{=}_{F_{21}(1)}\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 4\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2\left[(1-\lambda)^2-4\right]\Rightarrow$$

$$\boxed{p_\lambda(A)=(2-\lambda)^2(\lambda-3)(\lambda+1)}$$

A-ren **balio propioak** ondokoak dira:

- $\boxed{\lambda_1=2,\quad k_1=2\, izanik}$
- $\lambda_2=3,\ k_2=1\ izanik$
- $\lambda_3=-1,\quad k_3=1\ izanik$

$\lambda_1=2$ balio propio anizkoitzari elkartutako **azpiespazio propioa** ondokoa da.

- $\boxed{V(\lambda_1)=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^4\ /\ (A-\lambda_1\cdot\mathbb{I}_4)\vec{x}=\vec{0}\right\}}$

$$(A-\lambda_1 I)\vec{x}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Koefiziente matrizearen heina erabiliz, honako hau lortzen da:

$$r(A-\lambda_1\cdot\mathbb{I}_4)=r\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=3$$

$$d_1=\dim V(\lambda_1)=n-r(A-\lambda_1\cdot\mathbb{I}_4)=1\neq k_1=2$$

Orduan, A matrizea ez da antzekotasunez diagonalizagarria.

A matrizea ezin da ortogonalki diagonalizatu:

- antzekotasunez diagonalizagarria ez delako
- simetrikoa ez delako

B ZATIA

Izan bitez $S\equiv\begin{cases}x-2y+5z=a\\ x-2y+5z=b\\ x-2y+5z=c\end{cases}$ $\qquad\pi\equiv x-2y+5z=\dfrac{a+b+c}{3}$

$a,b,c\in\mathbb{R}$ zenbaki desberdinak badira, S ekuazio linealetako sistema bateraezina da: ekuazioen grafikoak plano paraleloak dira. Frogatu Karratuen Txikien metodoa erabiliz, lortutako soluzio guztien multzoa π planoa dela. (6puntu)

Ekuazio linealetako sistemaren matrize zabaldua ondokoa da:

$$AM=\begin{pmatrix}1&-2&5&a\\1&-2&5&b\\1&-2&5&c\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\substack{F_{21}(-1)\\F_{31}(-1)}}\begin{pmatrix}1&-2&5&a\\0&0&0&b-a\\0&0&0&c-a\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F_{32}\left(-\frac{c-a}{b-a}\right)\Leftrightarrow b\neq a}\begin{pmatrix}1&-2&5&a\\0&0&0&b-a\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Gainera, $\begin{vmatrix}-2&a\\0&b-a\end{vmatrix}=2(a-b)\underbrace{\neq}_{a\neq b}0$.

Hau da, $a,b,c\in\mathbb{R}$ zenbaki desberdinak badira, sistema beti bateraezina da, enuntziatuak esaten duen bezala, $r(AM)=2\neq r(A)=1$ delako.

Jarraian Karratuen Txikien metodoa erabiliz sistemaren soluzio hurbildua kalulatzen da.

Ekuazio sistema era bektorialean ondokoa da:

$$x\cdot\vec{d}_1'+y\cdot\vec{d}_2'+z\cdot\vec{d}_3'=\vec{b}' \qquad \begin{cases}\vec{d}_1'=(1,1,1)\\ \vec{d}_2'=(-2,-2,-2)\\ \vec{d}_3'=(5,5,5)\\ \vec{b}'=(a,b,c)\end{cases} \quad izanik$$

Izan bedi $W=\mathcal{L}\{(1,1,1),(-2,-2,-2),(5,5,5)\}$ azpiespazio bektoriala. S ekuazio sistema bateraezina denez, orduan $\vec{b}'=(a,b,c)\notin W$ eta sistemaren gai askea W azpiespazio bektorialean hurbilketarik onenagatik ordezkatu behra da. Horretarako, $B_W=\{(1,1,1)\}$, $\dim W=1$ izanik

1. erraz, W-ren oinarri bat lortzen da:
2. aurreko oinarri bat bektore bakar batekin osatuta dagoenez, $B_O=\{(1,1,1)\}$ ortogonala da
3. W-n $\vec{b}'$ gai askearen hurbilketarik onena $\vec{v}'$ kalkulatzen da

$$\vec{v}'=proy_W\,\vec{b}'=proy_{(1,1,1)}\,\vec{b}'$$

$$\vec{v}'=\frac{\langle\vec{b}',\vec{d}_1'\rangle}{\|\vec{d}_1'\|^2}\cdot\vec{d}_1'=\frac{a+b+c}{3}\cdot(1,1,1)=\frac{1}{3}(a+b+c,a+b+c,a+b+c)$$

4. Azkenean, gai aske berria ordezkatzen da, ondoko sistema lortuz:

$$\begin{cases}x-2y+5z=\dfrac{a+b+c}{3}\\ x-2y+5z=\dfrac{a+b+c}{3}\\ x-2y+5z=\dfrac{a+b+c}{3}\end{cases}$$

Hau da,soluzio guztien multzoa Karratuen Txikien metodoa erabiliz, ondoko planoa da:

$$\boxed{\pi\equiv x-2y+5z=\frac{a+b+c}{3}}$$

3. ARIKETA

(1.) Arrazoitu egia ala gezurra den ondoko baieztapena: “*Oinarri ortogonal batean Gram-en matrizea beti diagonala da”.* (3 puntu)

Egia, $B=\left\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\ \cdots,\vec{e}_n\right\}$ $\left(\mathbb{E}_n,<,>\right)$ espazio bektorial euklidearreko oinarri ortogonala bada, ondorengoa betetzen da:

$$\begin{cases}\left\langle\vec{e}_i,\vec{e}_j\right\rangle=0 & \forall\, i\neq j\\ \left\langle\vec{e}_i,\vec{e}_i\right\rangle\neq 0 & \forall\, i\,(i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

Ondorioz, Gram matrizea beti matrize diagonala izango da:

$$G=\begin{pmatrix}\left\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\right\rangle & \left\langle\vec{e}_1,\vec{e}_2\right\rangle & \cdots & \left\langle\vec{e}_1,\vec{e}_n\right\rangle\\ \left\langle\vec{e}_2,\vec{e}_1\right\rangle & \left\langle\vec{e}_2,\vec{e}_2\right\rangle & \cdots & \left\langle\vec{e}_2,\vec{e}_n\right\rangle\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \left\langle\vec{e}_n,\vec{e}_1\right\rangle & \left\langle\vec{e}_n,\vec{e}_2\right\rangle & \cdots & \left\langle\vec{e}_n,\vec{e}_n\right\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left\langle\vec{e}_1,\vec{e}_1\right\rangle & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \left\langle\vec{e}_2,\vec{e}_2\right\rangle & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \left\langle\vec{e}_n,\vec{e}_n\right\rangle\end{pmatrix}$$

(2.) Izan bedi *A* matrize erreala non bere errenkada bektoreak ondoko bektoreak diren:

$$\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4,\vec{u}_5\in\mathbb{R}^7-\left\{\vec{0}_{\mathbb{R}^7}\right\}$$

(a) Zein da *A* matrizearen ordena? (puntu 1)

A matrizeak 7 osagai dituzten 5 errenkada bektore dituenez: $\boxed{A\in\mathcal{M}_{5\times7}(\mathbb{R})}$

(b) Zein balioren artean dago h(*A*)? (puntu 1)

Izan bedi $S=\left\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\vec{u}_4,\vec{u}_5\right\}\subset\mathbb{R}^7-\left\{\vec{0}_{\mathbb{R}^7}\right\}$ bektore sistema:

- *S* askea bada: $\boxed{h(S)=5\Rightarrow\ \max h(A)=5}$
- *S* lotua bada eta bektore batek beste bektore guztiak sortzen baditu, adibidez, $\vec{u}_j=k_j\cdot\vec{u}_1\quad(j=2,3,4,5)$: $\boxed{h(S)=1\Rightarrow\ \min h(A)=1}$

Ondorioz: $\boxed{1\leq h(A)\leq 5}$

(c) $h(A)=3$ dela jakinda, ondoko baieztapenetatik egiak direla ziurta ditzakezunak zehaztu:

A matrizearen heina 3 bada, errenkadaka jarritako bost bektoreetatik hiru bektore linealki independenteak direla esan nahi du, hau da:

$$\boxed{h(A)=3 \Leftrightarrow \ hiru\ (errenkada)\, bektore\ linealki\ independenteak\ dira}$$

(c.1) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ askea da. (2 puntu)

Matrizean hiru bektore/errenkada linealki independenteak dira, baina ez dira atal honetan zehaztutakoak izan behar.

Hortaz, baieztapena gezurra da, izan ere $h(A)=3$ bete daiteke $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sistema askea izan gabe. Adibidez, $\vec{u}_1=\{1,1,1,1,1,1,1\}$, $\vec{u}_2=\{2,2,2,2,2,2,2\}$ eta $\vec{u}_3=\{3,3,3,3,3,3,3\}$ badira, askea izan behar den bektore sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_4, \vec{u}_5\}$ da.

(c.2) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ lotua da. (2 puntu)

Egia. $h(A)=3$ betetzen bada, matrizea sortzen duten bost errenkada bektoreetatik hiru baino ez dira linealki independenteak.

(c.3) $\dim\left[\mathcal{L}\left(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}\right)\right]=3$ (puntu 1)

Gezurra. $F=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ sistema lotua da, horrek $\dim \mathcal{L}(F)\le 3$ betetzen dela soilik bermatzen du. Adibidez, $\vec{u}_1=\{1,1,1,1,1,1,1\}$, $\vec{u}_2=\{2,2,2,2,2,2,2\}$ eta $\vec{u}_3=\{3,3,3,3,3,3,3\}$ eta $\vec{u}_4=\{1,0,0,0,0,0,0\}$ badira, orduan $h(F)=2 \Rightarrow \dim \mathcal{L}(F)=2$

---

4. ARIKETA

Izan bedi $\mathcal{P}_3$-ren $S \triangleq \{p(x)\in \mathcal{P}_3 \,/\, p(1)=p'''(0)=0\}$ azpiespazio bektoriala.

(1) Kalkulatu S azpiespazio bektorialaren ekuazio parametrikoak eta inplizituak. Lortu S-ren B_S oinarri bat eta bere dimentsioa. (2 puntu)

Izan bedi $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d \in S \subset \mathcal{P}_3$, ondokoa betetzen da:

$$\left\{\begin{array}{l} p(1)=a+b+c+d=0 \Leftrightarrow \begin{cases} d=-a-b-c \\ b=-a-c-d \\ c=-a-b-d \end{cases} \\ p'''(x)\big|_{x=0}=6a=0 \Leftrightarrow a=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-c-d \quad \forall c,d\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Izan ere, b aldagaia bakandu beharrean, d edo c bakan daiteke:

$$\begin{cases} a=0 \\ d=-c-b \quad \forall c,b\in\mathbb{R} \end{cases} \qquad \begin{cases} a=0 \\ c=-b-d \quad \forall b,d\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Orduan, $p(x)=(-c-d)x^2+cx+d\in S$:

$$S=\left\{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d \,/\, a=0\wedge b+c+d=0 \;/\; a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\left\{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d \,/\, a=0\wedge b=-c-d \;/\; a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\left\{p(x)=(-c-d)x^2+cx+d \,/\; b,c,d\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=\mathcal{L}(F)=\mathcal{L}\left(\left\{u_1(x)=x^2-x,\,u_2(x)=x^2-1\right\}\right)$$

$\boxed{S=\mathcal{L}(F)}$, $\mathcal{P}_3$-ren azpiespazio bektoriala dela ondorioztatzen da itxidura linealak ezpazio bektorialaren egitura aljebraikoa beti duelako

Gainera F sistema askea da $r(F)=r(M)=r\left(\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\right)=2=Card(F)$ delako.

Orduan, S-ren oinarri bat eta dimentsioa ondokoa da:

$$\boxed{B_S=F=\left\{u_1(x)=x^2-\mathrm{x},\,u_2(x)=x^2-1\right\}\subset S\ \Rightarrow \dim S=2}$$

---

(2) Osatu S-ren B_S oinarria $\mathcal{P}_3$-ren B* oinarri bat lortu arte (2 puntu)

B_S oinarriak bi polinomioak dituenez eta $\dim\mathcal{P}_3=4$ denez, $\mathcal{P}_3$-ren B^* oinarri bat lortzeko bi polinomio falta dira. B*-ko lau polinomioak independenteak izan behar dira. Adibidez:

$u_3(x)=x^3,\,u_4(x)=1$.

$$h(B^*)=h\left(\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\0&1&0&-1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)=4=Card(B^*)\qquad \begin{vmatrix}0&1&-1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1\neq0 \text{ delako.}$$

Beraz, $\boxed{B^*=\left\{u_1(x)=x^2-x,\,u_2(x)=x^2-1,\,u_3(x)=x^3,\ u_4(x)=1\right\}}$ oinarria izan daiteke.

(3) Lortu S-ren azpiespazio bektoriala ez den S-ren T multzo bat. Arrazoitu erantzuna. (2 puntu)

Azpiespazio bektoriala ez den S-ren T multzo bat ondokoa izan daiteke:

$$\boxed{T=S-\left\{\overline{0}_{\mathcal{P}_3}=0x^3+0x^2+0x+0\right\}}$$

T ez da azpiespazio bektoriala bere barnean elementu neutroa ez dagoelako.

(4) Kalkulatu $r(x)=x^3+1$-ren hurbilketarik onena S-n, ohiko biderkadura eskalarra erabiliz. Lortu egindako errorea. Interpretatu lortutako emaitza. (4 puntu)

$r(x)\notin S$ betetzen da .

$\mathcal{P}_3$-n ohiko biderkadura eskalarra kontsideratzen da:

$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,,\ q(x)=a'x^3+b'x^2+c'x+d' \in \mathcal{P}_3$ izanik.

Ikusten da B_S oiinarri otrogonala ez dela, izan ere,

$$\langle u_1(x),u_2(x)\rangle=\langle x^2-x,\, x^2-1\rangle=1\neq 0 \Leftrightarrow u_1(x)\not\perp u_2(x)$$

Gram−Schmidt-en metodoa erabiliz, B_O oinarri ortogonola lortzen da B_S abiapuntu hartuta.

- $q_1(x)=u_1(x)=x^2-x \quad \Rightarrow \|q_1(x)\|^2=2$
- $q_2(x)=u_2(x)-\dfrac{\langle q_1(x),u_2(x)\rangle}{\|q_1(x)\|^2}\cdot q_1(x)=u_2(x)-\dfrac{1}{2}q_1(x)=$

$$=x^2-1-\frac{1}{2}\left(x^2-x\right)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1 \quad \Rightarrow \|q_2(x)\|^2=\frac{3}{2}$$

$$\boxed{B_O=\left\{q_1(x)=x^2-x\,,\, q_2(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1\right\}}$$

Argi dago $\mathcal{L}(B_S)=\mathcal{L}(B_O)$ betetzen dela.

S -n $r(x)=x^3+1$ -ren proiekzio ortogonala ondoko Fourier-en baturaren kalkulatzen da:

$$r_p(x)=proy_S\, r(x)=proy_{\mathcal{L}(B_S)}r(x)=proy_{\mathcal{L}(B_O)}r(x)=\sum_{i=1}^{2} proy_{q_i(x)}r(x)=\sum_{i=1}^{2}\frac{\langle r(x),q_i(x)\rangle}{\|q_i(x)\|^2}q_i(x)$$

Interpretazio geometrikoa berehalkoa da:

$$r_p(x)=proy_S\ r(x)=\sum_{i=1}^{2} proy_{q_i(x)}\ r(x)=proy_{q_1(x)}\ r(x)+proy_{q_2(x)}\ r(x)$$

Dagozkion kalkuluak garatuz, eskatutako proiekzioa lortzen da:

$$r_p(x)=\frac{\langle x^3+1,\,x^2-x\rangle}{\|x^2-x\|^2}\left(x^2-x\right)+\frac{\left\langle x^3+1,\,\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1\right\rangle}{\left\|\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1\right\|^2}\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-1\right)=-\frac{1}{3}\left(x^2+x-2\right)$$

$$\boxed{r_p(x)=-\frac{1}{3}\left(x^2+x-2\right)}$$

Errore bektorea honako hau da:

$$\varepsilon(x)=r(x)-r_p(x)=\left(x^3+1\right)-\left(-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)=x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

Hurbilketan egindako errorea errore bektorearen norma da:

$$\boxed{ERROR=\|\varepsilon(x)\|=+\sqrt{\langle\varepsilon(x),\varepsilon(x)\rangle}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ unitate}$$

Interpretazioa. S -ko polinomio guztien artean , Karratu Txikien metodoaren arabera, $r(x)$ polinomiotik distantzia minimora dagoen polinomioa $r_p(x)$ da eta egindako errorea 1.1547 unitatekoa da.

5. ARIKETA

Izan bedi $\left(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle\right)$ espazio bektoriala ohiko biderkadura eskalarrarekin. Izan bitez ondoko azpiespazio bektorialak:

$$S \equiv \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$T \equiv \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 / (-1,-2,3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

(1.) Lortu aurreko azpiespazio bien oinarri bat eta haien dimentsioa (2 puntu)

S **AZPIESPAZIO BEKTORIALA**.

S azpiespazioa $B_S = \{(1,-2,0),(-1,2,2)\}$ bektore familiatik sortuta dago: $S = \mathcal{L}(B)$

B_S sistema sortzailea eta askea denez , orduan S -ren oinarri bat da

$$r\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \;\Rightarrow\; \boxed{B_S = \{(1,-2,0),(-1,2,2)\} \Rightarrow \dim S = 2}$$

T **AZPIESPAZIO BEKTORIALA**.

.

$$\forall \vec{v}(x,y,z) \in T:\ (-1,-2,3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x-2y+3z = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2y+3z$$

Hau da, $\forall \vec{v}(x,y,z) \in T:\ (x,y,z) = (-2y+3z, y, z) = y(-2,1,0) + z(3,0,1)$

Orduan: $T = \mathcal{L}(B_T) = \mathcal{L}\left(\{(-2,1,0),(3,0,1)\}\right)$

B_T sistema sortzailea eta askea denez , orduan T -ren oinarri bat da

$$r\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \;\Rightarrow\; \boxed{B_T = \{(-2,1,0),(3,0,1)\} \Rightarrow \dim T = 2}$$

(2) Adierazi S eta T era inplizituak (2 puntu)

S AZPIESPAZIO BEKTORIALA.

S ko bektore guztiek $B_S = \{(1,-2,0),(-1,2,2)\}$ oinarriko bektoreen konbinazio linealen bidez adieraz dezakete.

Hau da, $\forall \vec{u}(x,y,z)\in S:\ \ (x,y,z)=\alpha(1,-2,0)+\beta(-1,2,2)$

$$(x,y,z)=\alpha(1,-2,0)+\beta(-1,2,2)\Rightarrow\begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=-2(\alpha-\beta) \\ z=2\beta \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2x+y=0 \\ \forall z\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Antzeko eran, $\{(1,-2,0),(-1,2,2),(x,y,z)\}$ sistema lotua da:

$$r\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ -2 & 2 & y \\ 0 & 2 & z \end{pmatrix}=2\Leftrightarrow\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ -2 & 2 & y \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ \cancel{2z}-4x-2y-\cancel{2z}=0\ \Rightarrow\ 2x+y=0$$

Orduan: $\boxed{S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ 2x+y=0\}=\{(x,-2x,z)\ /\ x,z\in\mathbb{R}\}}$

T AZPIESPAZIO BEKTORIALA.

Aurreko atalean T azpiespazio bektorialean barnean egoteko $\mathbb{R}^3$-ko bektore baten koordenatuek bete behar duten eralzioa lortu da:

$$\boxed{T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ x=-2y+3z\}=\{(-2y+3z,y,z)\ /\ y,z\in\mathbb{R}\}}$$

---

(3) Zehaztu $I=S\cap T$ azpiespazio bektoriala eta interpretatu lortutako emaitza (3 puntu)

$S\cap T$ -ko bektoreek S eta T azpiespazio bektorialen ekuazioak bete behar dituzte

$$\forall\vec{v}(x,y,z)\in S\cap T:\ \ \vec{v}\in S\wedge\vec{v}\in T$$

$$\boxed{S\cap T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ y=-2x\wedge x=-2y+3z\}}$$

Orduan, $\forall\vec{u}(x,y,z)\in S\cap T:\ \begin{cases} y=-2x \\ x=-2y+3z \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=-2x \\ x=4x+3z \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=-2x \\ z=-x \end{cases}$

$$\boxed{S\cap T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ /\ y=-2x,\ z=-x\}=\{(x,-2x,-x)\ /\ x\in\mathbb{R}\}}$$

Hau da, $\forall\vec{v}(x,y,z)\in S\cap T:\ \ (x,y,z)=(x,-2x,-x)=x(1,-2,-1)$

Izan ere: $S\cap T=\mathcal{L}(B_{S\cap T})=\mathcal{L}(\{(1,-2,-1)\})$

$\boxed{B_{S\cap T}=\{(1,-2,-1)\}\Rightarrow\dim S\cap T=1}$ azpiespazio ebakiduraren oinarri bat da

Interpretazioa. S eta T -ren ekuazio inplizituek bi planoaren ekuazioak adierazten dituzte, $S\equiv 2x+y=0$ eta $T\equiv x+2y-3z=0$ hurrenez hurren. Orduan, bi azpiespazioen ebakiduraren interpretazio geometrikoa bi planoen arteko ebakidura da. Bi planoa hauek zuzen batean elkar ebakitzen dute eta zuzen honetako norabide bektorea onarriko bektorea da.

$$\boxed{S \bigcap T \equiv r \equiv \begin{cases} y = -2x \\ x = -2y + 3z \end{cases} \Rightarrow \vec{d}_r = (1, -2, -1)}$$

---

(4) Izan bitez $Q(1,1,0)$ eta $P(0,0,1)$ puntuak, proiektatu $\overrightarrow{PQ}$ bektorea ortogonalki $I = S \bigcap T$ azpiespazioaren gainean eta lortu proiekzio horren norma. (3 puntu)

$\overrightarrow{PQ}$ bektorea honako hau da: $\overrightarrow{PQ} = (1,1,0) - (0,0,1) = (1,1,-1) \notin I = S \bigcap T$

$I = S \bigcap T$ oinarri ortogonal bat ondokoa da: $\boxed{B_O = B_{S \cap T} = \{(1,-2,-1)\}}$

Proiekzio ortogogonalaren kalkulua ohiko biderkadura eskalarra erabilizl:

$$\vec{p} = proy_{S \cap T}\, \overrightarrow{PQ} = proy_{(1,-2,-1)}\, \overrightarrow{PQ}$$

$$\vec{p} = \frac{\langle (1,1,-1), (1,-2,-1) \rangle}{\| (1,-2,-1) \|^2} \cdot (1,-2,-1) = \frac{0}{6} \cdot (1,-2,-1) = (0,0,0)$$

$$\boxed{\vec{p} = proy_{S \cap T}\, \overrightarrow{PQ} = \vec{0}_{\mathbb{R}^3}}$$

Emaitza hau lortu da $\overrightarrow{PQ}$ bektorea $B_{S \cap T}$ oinarriarekiko ortogonala izateagatik. Beraz, normaren balioa zeroa da.