AZKEN ARIKETA (Ebaluazio jarraitua)

EBAZPENA

2015–2016 ikasturtea. 2.deialdia: 2016ko ekainaren 30ean

1.ARIKETA

Izan bedi *Mathematica* programako ondoko kodea. Kode honetatik, nahi gabe A matrizea definitzeko erabiltzen zen In[1] sarrera ezabatu da.

```
In[2]:= p[x_] = CharacteristicPolynomial[A, x]
Out[2]= -1 + x + x^2 - x^3

In[3]:= -A * A + A + IdentityMatrix[3]
Out[3]= {{1, 0, 0}, {0, 1, -2}, {0, 0, -1}}

In[4]:= Eigensystem[A]
Out[4]= {{-1, 1, 1}, {{-1, 1, 2}, {-1, 1, 0}, {0, 0, 0}}}

In[5]:= -A.A + A + IdentityMatrix[3]
Out[5]= {{0, -1, 1}, {1, 2, -1}, {1, 1, -1}}
```

Out[2] irteeran *x*-ren menpekoa den *A* matrizearen $p(x)$ polinomio karakteristikoa kalkulatzen da. Emaitza honetatik *A* matrizearen ordena ondoriozta daiteke.

$$\boxed{p(x)\in\mathbb{P}_3(x) \Leftrightarrow A\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})}$$

Aurreko kodeko informazioa erabiliz, erantzun arrazoituz ondoko galderei:

(1.) Kalkula ezazu *A* matrizearen determinantea. (2 puntu)

$p(x)$ polinomio karakteristikoa $x=0$ -n ebaluatuz, eskatzen den determinantea lortzen da:

$$\boxed{p(0)=\det(A)=|A|=-1}$$

Determinantea, *A* matrizearen balio propioen biderkadura bezala ere lor daiteke. Out[4] irteeran A matrizearen espektroa lortzen da, hortaz:

$$\sigma(A)=\left\{\lambda_1=-1\left(k_1=1\right),\ \lambda_2=1\left(k_2=2\right)\right\} \Rightarrow \boxed{\det(A)=\prod_{i=1}^{2}\left(\lambda_i\right)^{k_i}=(-1)^1\cdot 1^2=-1}$$

(2.) Lor ezazu *A* matrizearen alderantzizkoa era esplizituan. (2 puntu)

A matrizea alderanzgarria da, izan ere, $\det(A)=|A|=-1\neq 0$ betetzen da.

Cayley-Hamilton-en teoremaren arabera, $p(\lambda)$, *A* matrizearen polinomio karakteristikoa, matrize horren polinomio deuseztatzailea da. Ondorioz, 3. ordenako identitate matrizea $\mathbb{I}_3$ adieraziz eta 3. ordenako matrize nulua $\mathbb{O}_{3\times 3}$ adieraziz, ondokoa daukagu:

$$p(A)=\mathbb{O}_{3\times 3} \Leftrightarrow -A^3+A^2+A-\mathbb{I}_3=\mathbb{O}_{3\times 3} \Leftrightarrow A\left(-A^2+A+\mathbb{I}_3\right)=\mathbb{I}_3 \Leftrightarrow \boxed{A^{-1}=-A^2+A+\mathbb{I}_3}$$

Out[5] irteeran eskatzen den alderantzizko matrizea kalkulatzen da:

$$\boxed{A^{-1}=-A^2+A+\mathbb{I}_3=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

(3.) A matrizea diagonalizagarria al da? Baiezko kasuan, zehaztu *D* matrize diagonala eta *P* matrize erregularra. (2 puntu)

A matrizea ez da diagonalizagarria, izan ere $\boxed{k_i \neq \dim S(\lambda_i) \quad \forall i\,(i=1,2)}$

Zehazki: $k_2=2\neq \dim S(\lambda_2=1)=1$

Out[4] irteeran ikus daitekeen bezalaxe: $B_{S(1)}=\{(-1,1,0)\} \Rightarrow \dim S(1)=1$

Ondorioz, ezinezkoa da bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat lortzea.

(4.) Baliteke *A*-ren bektore propioekin osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat lortzea? Erantzuna baiezkoa bada zehaztu oinarri hori. (puntu 1)

Ez, aurreko atalean esan den bezala, ezinezkoa da hiru bektore propio aske lortzea; bi bektore propio aske baino ezin dira lortu.

Out[4] irteeratik ondoko daukagu:

- $B_{S(-1)}=\{(-1,1,2)\} \Rightarrow \dim S(-1)=1$
- $B_{S(1)}=\{(-1,1,0)\} \Rightarrow \dim S(1)=1$

Ondorioz: $\boxed{\dim S(-1)+\dim S(1)=2<3=\dim \mathbb{R}^3}$

(5.) Zeintzuk izango lirateke A^n-ren bektore propioak, $n\in\mathbb{Z}$ izanik? (3 puntu)

Out[4] irteeran A matrizearen espektroa lortzen da: $\sigma(A)=\{\lambda_1=-1\,(k_1=1),\ \lambda_2=1\,(k_2=2)\}$

Bestalde, *A* matrizearen balio propioen eta balio propio horiei elkartutako bektore propioen definizioagatik $\forall i\,(i=1,2)$: $\quad A\cdot\vec{v}_i=\lambda_i\cdot\vec{v}_i \quad (1)$

Aurreko (1) adierazpena *A* matrizeagatik biderkatuz: $\quad A^2\cdot\vec{v}_i=A(\lambda_i\cdot\vec{v}_i)=\lambda_i^2\cdot\vec{v}_i \quad (2)$

(2) adierazpenean prozesu bera jarraituz: $\quad A^3\cdot\vec{v}_i=A(\lambda_i^2\cdot\vec{v}_i)=\lambda_i^3\cdot\vec{v}_i$

Horrela, ondorengo adierazpenera hel gaitezke: $\boxed{A^n\cdot\vec{v}_i=A(\lambda_i^{n-1}\cdot\vec{v}_i)=\lambda_i^n\cdot\vec{v}_i}$

Ondorioz:

- $\boxed{n=2k \quad \forall k\in\mathbb{N}}$ bada: $\boxed{\sigma(A^n)=\{\lambda_1=1\ (k_1=3)\}}$

- $\boxed{n = 2k-1 \;\; \forall k \in \mathbb{N}}$ bada: $\boxed{\sigma(A^n) = \sigma(A) = \{\lambda_1 = -1 (k_1 = 1), \lambda_2 = 1 (k_2 = 2)\}}$

bektore propioak $(-1, 1, 2)$ eta $(-1, 1, 0)$ izanik.

---

2. ARIKETA

(1.) Arrazoitu egia ala gezurra den ondoko baieztapena: "*Oinarri ortogonal batean Gram-en matrizea beti diagonala da*". (3 puntu)

Egia, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \cdots, \vec{e}_n\}$ $(\mathbb{E}_n, <,>)$ espazio bektorial euklidearreko oinarri ortogonala bada, ondorengoa betetzen da:

$$\begin{cases} \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = 0 & \forall\, i \neq j \\ \langle \vec{e}_i, \vec{e}_i \rangle \neq 0 & \forall\, i\, (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

Ondorioz, Gram matrizea beti matrize diagonala izango da:

$$G = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_1, \vec{e}_n \rangle \\ \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle \vec{e}_n, \vec{e}_1 \rangle & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \langle \vec{e}_n, \vec{e}_n \rangle \end{pmatrix}$$

(2.) Izan bedi *A* matrize erreala non bere errenkada bektoreak ondoko bektoreak diren:

$$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5 \in \mathbb{R}^7 - \{\vec{0}_{\mathbb{R}^7}\}$$

(a) Zein da *A* matrizearen ordena? (puntu 1)

A matrizeak 7 osagai dituzten 5 errenkada bektore dituenez: $\boxed{A \in \mathcal{M}_{5\times 7}(\mathbb{R})}$

(b) Zein balioren artean dago h(*A*)? (puntu 1)

Izan bedi $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5\} \subset \mathbb{R}^7 - \{\vec{0}_{\mathbb{R}^7}\}$ bektore sistema:

- *S* askea bada: $\boxed{h(S) = 5 \Rightarrow \max h(A) = 5}$
- *S* lotua bada eta bektore batek beste bektore guztiak sortzen baditu, adibidez, $\vec{u}_j = k_j \cdot \vec{u}_1 \;\; (j = 2, 3, 4, 5)$: $\boxed{h(S) = 1 \Rightarrow \min h(A) = 1}$

Ondorioz: $\boxed{1 \leq h(A) \leq 5}$

(c) $h(A)=3$ dela jakinda, ondoko baieztapenetatik egiak direla ziurta ditzakezunak zehaztu:

A matrizearen heina 3 bada, errenkadaka jarritako bost bektoreetatik hiru bektore linealki independenteak direla esan nahi du, hau da:

$$\boxed{h(A)=3 \Leftrightarrow \; hiru \; (errenkada) bektore \; linealki \; independenteak \; dira}$$

(c.1) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ askea da. (2 puntu)

Matrizean hiru bektore/errenkada linealki independenteak dira, baina ez dira atal honetan zehaztutakoak izan behar.

Hortaz, baieztapena gezurra da, izan ere $h(A)=3$ bete daiteke $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ sistema askea izan gabe. Adibidez, $\vec{u}_1=\{1,1,1,1,1,1,1\}$, $\vec{u}_2=\{2,2,2,2,2,2,2\}$ eta $\vec{u}_3=\{3,3,3,3,3,3,3\}$ badira, askea izan behar den bektore sistema $\{\vec{u}_1, \vec{u}_4, \vec{u}_5\}$ da.

(c.2) $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ lotua da. (2 puntu)

Egia. $h(A)=3$ betetzen bada, matrizea sortzen duten bost errenkada bektoreetatik hiru baino ez dira linealki independenteak.

(c.3) $\dim\left[\mathcal{L}\left(\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}\right)\right]=3$ (puntu 1)

Gezurra. $F=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$ sistema lotua da, horrek $\dim \mathcal{L}(F)\le 3$ betetzen dela soilik bermatzen du. Adibidez, $\vec{u}_1=\{1,1,1,1,1,1,1\}$, $\vec{u}_2=\{2,2,2,2,2,2,2\}$ eta $\vec{u}_3=\{3,3,3,3,3,3,3\}$ eta $\vec{u}_4=\{1,0,0,0,0,0,0\}$ badira, orduan $h(F)=2 \Rightarrow \dim \mathcal{L}(F)=2$

3.ARIKETA

$\left(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \langle\,,\,\rangle\right)$ espazio bektorial euklidearrean eta ohiko biderkadura eskalarra erabiliz, ondoko azpiespazio bektorialak kontutan hartzen dira:

- $S=\mathcal{L}(B) \,/\, B=\left\{A_1=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\right\}\subset\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$
- $U=\left\{A \,/\, A=A^T\right\}\subset\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

(1.) Kalkulatu bi espazio bektorialen ekuazio parametrikoak eta inplizituak, haien dimentsioak zehaztuz. (2 puntu)

<u>*S AZPIESPAZIOA*</u>: $S=\mathcal{L}(B) \,/\, B=\left\{A_1=\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\right\}\subset\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$

S azpiespazioa *B* matrize multzoak sortzen du. Matrize multzo hori erabiliz azpiespazioaren oinarri bat lortuko da:

$$\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2 = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ 2\alpha - \beta = 0 \\ \alpha = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

B *S*-ren sistema sortzailea izateaz gain, sistema askea da, hortaz, *B* *S*-ren oinarri bat da eta bere dimentsioa 2 da: $\boxed{\dim S = 2}$

S-ren barnean dagoen edozein matrize *B* bektore sistemako matrizeen konbinazio lineal bezala adieraz daiteke:

$$\forall M \in S \Rightarrow M = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 2\alpha - \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Konbinazio hau abiapuntutzat harturik *S*-ren ekuazio parametrikoak lortzen dira:

$$\boxed{S = \left\{ \begin{pmatrix} \beta & 2\alpha - \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ a = \beta, b = 2\alpha - \beta, c = \alpha, d = 0 \ \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}}$$

Eragiketak burutuz S-ren ekuazio inplizituak lortzen dira:

$$\boxed{S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ a + b - 2c = 0, d = 0 \ \ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}}$$

U AZPIESPAZIOA: $U = \left\{ A \,/\, A = A^T \right\} \subset \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$

Bere irauliaren berdinak diren 2. ordenako matrize karratuak *U* azpiespazioaren barnean daude. Emandako baldintza kontuan izanik ekuazio parametrikoak lor daitezke:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \ / \ a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \ / \ a, b, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\boxed{U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ / \ a = \alpha, b = c = \beta, d = \gamma, \ \forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}}$$

ekuazio inplizituak ere:

$$\boxed{U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \ / \ b - c = 0 \right\}}$$

Dimentsioa zehazteko, *U*-ren oinarri bat lortzen da:

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \in U : \ \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ondorioz: $$U = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right) = \mathcal{L}(B_U)$$

B_U sistema askea da, izan ere: $h\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$

Sistema sortzailea eta askea denez, oinarri bat da. Barnean dauden bektore kopuruak *U*-ren dimentsioa adierazten du:

$$\boxed{B_U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim U = 3}$$

(2.) Zehaztu $S \cap U$ azpiespazio bektoriala, kalkulatu $B_{S\cap U}$, $S \cap U$-ren oinarri bat eta bere dimentsioa. (2 puntu)

Ebakiduran, *S* eta *U* azpiespazioetan aldi berean dauden matrizeak daude, ondorioz, bi azpiespazioen ekuazioak bete behar dira:

$$\forall M \in S \cap U: \quad M \in S \wedge M \in U$$

$$S \cap U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; / \; a + b - 2c = 0, d = 0, b - c = 0 \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Azpiespazioa, bai ekuazio inplizituak (**1**), bai ekuazio parametrikoak (**2**) erabiliz zehatz daiteke:

$$\boxed{S \cap U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \; / \; a - c = 0, d = 0, b - c = 0 \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}} \quad (\mathbf{1})$$

$$\boxed{S \cap U = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \; / \; a \in \mathbb{R} \right\}} \quad (\mathbf{2})$$

Azpiespazioaren ekuazioak erabiliz, oinarri bat eta dimentsioa lortzen dira:

$$S \cap U = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \right) \Rightarrow \boxed{B_{S\cap U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \dim(S \cap U) = 1}$$

(3.) Zehaztu $S + U$ azpiespazio bektoriala, kalkulatu B_{S+U}, $S + U$-ren oinarri bat, eta bere dimentsioa. (2 puntu)

Lehenengo eta behin, eskatutako azpiespazioaren dimentsioa kalkulatzen da:

$$\boxed{\dim(S+U) = \dim S + \dim U - \dim(S \cap U) = 2 + 3 - 1 = 4}$$

U eta *S* azpiespazioen oinarrietako bektoreek $S + U$ azpiespazioaren sistema sortzailea osatzen dute:

$$S + U = \mathcal{L}\left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Sistema honetatik linealki independenteak diren lau bektore kontsideratuz eskatutako oinarria lor daiteke:

$$h\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\boxed{B_{S+U} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Aurreko kalkuluak ekiditea ahalbideratzen duen era errazago bat $\boxed{\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}$-ren oinarri kanonikoa hartzea da, izan ere:

$$\left.\begin{array}{c} S+U \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \\ \dim(S+U) = \dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow S+U = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

(4.) Osatu *S*-ren B_S oinarria $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ren B' oinarri bat lortu arte. (puntu 1)

Aurreko atal batean, B_S erabiliz adieraziko den *S*-ren oinarri bat lortu da:

$$B_S = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ren edozein oinarrik lau bektore linealki independente ditu, izan ere: $\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = 4$.

B_S oinarria osatuz $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ren B' oinarria lortu behar denez, lau matrizetako bi A_1 eta A_2 izan behar dira. Beste biak oinarri kanonikotik har daitezke, osatutako sistema askea izan behar dela kontuan izanik:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow h\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

Ondorioz, eskatzen den $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$–ren oinarria ondokoa da:

$$\boxed{B' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

(5.) Lortu $\mathbb{I}_2 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ identitate matrizetik distantzia minimora dagoen $B_1 \in S$ matrizea. Kalkulatu distantzia hori. (3 puntu)

Eskatzen den matrizea $\mathbb{I}_2$ matrizeak S-ren gainean duen proiekzio ortogonala da, hau da, $\mathbb{I}_2$-k S-n duen hurbilketa onena: $B_1 = proy_S\, \mathbb{I}_2$.

$\mathbb{I}_2 \notin S$ betetzen da, izan ere:

$$\nexists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad non \quad \alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2 = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & 2\alpha - \beta \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2 \; den$$

$\left(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \langle\ ,\ \rangle\right)$ espazio bektorial euklidearrean ohiko biderkadura eskalarra erabiliz, B_S oinarria ez da oinarri ortogonala:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -2 \neq 0$$

Ondorioz, hurrengo pausua B_S oinarrian Gram−Schmidt-en metodoa aplikatuz S-ren oinarri ortogonala kalkulatzea da:

- $A_1 = M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $M_2 = A_2 - \dfrac{\langle A_1, A_2 \rangle}{\|A_1\|^2} \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{(-2)}{5} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \in S$$

S-ren oinarri ortogonala $\boxed{B_O = \left\{ M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 \end{pmatrix} \right\}}$ da.

Proiekzio ortogonalaren kalkulua:

$$B_1 = proy_S\, \mathbb{I}_2 = \sum_{i=1}^{2} proy_{M_i}\, \mathbb{I}_2$$

$$B_1 = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1/5 \\ 2/5 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 & -1/5 \\ 2/5 & 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1/5 \\ 2/5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= 0 + \frac{1}{6/5}\begin{pmatrix} 1 & -1/5 \\ 2/5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} \in S$$

$$\boxed{B_1 = proy_S \, \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\mathbb{I}_2$-ren eta berak S-n duen hurbilketarik onenaren arteko distantzia:

$$\| B_1 - \mathbb{I}_2 \| = \left\| \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/6 & -1/6 \\ 1/3 & -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{\frac{21}{18}} = \sqrt{\frac{7}{6}}\ u.$$

$$\boxed{dist\left(B_1, \mathbb{I}_2\right) = \| B_1 - \mathbb{I}_2 \| = \sqrt{\frac{7}{6}}\ u.}$$

4.ARIKETA

Izan bedi ekuazio linealetako sistema bateko *AM* matrize zabaldua:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2+\alpha & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2+\alpha & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2+\alpha & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2+\alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$$

(1.) Kalkulatu koefizienteen matrizearen heina $\alpha \in \mathbb{R}$ parametroaren balio desberdinen arabera. (2 puntu)

Sistemaren A koefiziente matrizean errenkadekiko/zutabekiko oinarrizko eragiketak erabiliz ondoko daukagu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2+\alpha & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2+\alpha & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2+\alpha \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underset{F_i \leftarrow F_i - F_1,\, i\in[2,5]}{\sim} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A eta B matrizeak errenkadaka baliokideak dira, $A \sim B$, ondorioz: $h(A) = h(B)$.

Gainera, B matrizea mailakatua da (errenkadaka mailakatua), hortaz, bere heina errenkada ez nulu kopuruarekin bat dator.

$h(A)$-ren azterketan $\alpha \in \mathbb{R}$ parametroaren araberako ondoko kasuak agertzen dira:

1. Kasua: $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2\}}$

Kasu honetan, B matrizeko lau errenkada ez-nuluak dira: $\boxed{h(B) = h(A) = 4}$.

2. Kasua: Kasu honek benetan antzekoak diren hiru kasu biltzen ditu: $\boxed{\alpha = k \quad (k=0,1,2)}$. Kasu hauetan B matrizeak bi errenkada nulu ditu (azkeneko errenkadaz gain, bigarrena $\alpha=0$ bada, hirugarrena $\alpha=1$ bada eta laugarrena $\alpha=2$ bada). Aipatutako kasu bakoitzari elkartutako matrizea ondorengoa litzateke (enuntziatutako orden bera matenduz):

$$B_0 = B_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_1 = B_{\alpha=1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = B_{\alpha=2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nahi bada, errenkaden trukaketa erraz bati eskez B_0 eta B_1 matrizeak era mailakatuan lor daitezke:

Edozein kasutan $\boxed{h(B) = h(A) = 3}$.

Mathematica erabiliz emaitza bera lortzen da, ondoren agertzen den kodean ikus daitekeen bezalaxe:

```
In[1]:= A = {{1, 2, 3, 4}, {1, 2 + a, 3, 4}, {1, 2, 2 + a, 4}, {1, 2, 3, 2 + a}, {1, 2, 3, 4}};

In[2]:= RowReduce[A]
Out[2]= {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, 0, 0}}

In[3]:= {MatrixRank[A /. a → 0], MatrixRank[A /. a → 1], MatrixRank[A /. a → 2]}
Out[3]= {3, 3, 3}
```

B' azpi-matrizearen determinantea erabiliz, $\alpha \in \mathbb{R}$ parametroaren arabera $h(A)$ azter daiteke

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B') = |B'| = \prod_{i=0}^{2}(\alpha - i) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Ebazpena *Mathematica* erabiliz:

```
In[4]:= Bp = {A[[1]], A[[2]], A[[3]], A[[4]]}
Out[4]= {{1, 2, 3, 4}, {1, 2 + a, 3, 4}, {1, 2, 2 + a, 4}, {1, 2, 3, 2 + a}}

In[5]:= Det[Bp] // Factor
Out[5]= (-2 + a) (-1 + a) a

In[6]:= Solve[Det[Bp] = 0, a]
Out[6]= {{a → 0}, {a → 1}, {a → 2}}
```

(2.) Zein $\alpha \in \mathbb{R}$ parametroaren baliotarako da *AM* matrize alderanzgarria? (2 puntu)

Sistemaren *AM* matrize zabalduan errenkadekiko/zutabekiko oinarrizko eragiketak erabiliz ondoko daukagu:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2+\alpha & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2+\alpha & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2+\alpha & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2+\alpha \end{pmatrix} \underset{F_i \leftarrow F_i - F_1,\, i\in[2,5]}{\sim} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-3 \end{pmatrix}$$

AM eta *B* matrizeak errenkadaka baliokideak direnez, $AM \sim B$, kasu honetan, ondorengoa daukagu:

- $\det(B) = \det(AM)$
- B matrizea goi-triangeluarra denez, bere determinantea bere diagonal nagusia osatzen duten elementuen biderkadura da:

$$\det(B) = \det(AM) = |AM| = \prod_{i=0}^{3} (\alpha - i) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

M matrize bat alderanzgarria da (edo gauza bera dena, erregularra da), $\det(M) \neq 0$ bada.

Hortaz, AM alderanzgarria da $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3\}}$, izan ere:

$$\det(AM) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3\}$$

Ondorioz: $\exists AM^{-1} \in \mathcal{M}_{5\times5}(\mathbb{R}) \;/\; AM \cdot AM^{-1} = AM^{-1} \cdot AM = \mathbb{I}_5$

(3.) Idatzi era orokorrean eta era bektorialean emandako ekuazio linealetako sistema. (2 puntu)

Bost ekuazio lineal eta lau ezezagun dituen sistema ez-homogeneoa da. Ezezagunak x_1, x_2, x_3, x_4 izendatuz, sistemaren adierazpen desberdinak:

- Adierazpen orokorra:

$$\boxed{S \triangleq \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + (\alpha+2)x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + (\alpha+2)x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + (\alpha+2)x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = (\alpha+2) \end{cases}}$$

- Adierazpen bektoriala: $\boxed{S \triangleq \sum_{i=1}^{4} \vec{a}_i' x_i = \vec{b}}$ non $\vec{a}_i' \in \mathbb{R}^5 \quad \forall i\,(i = 1, 2, 3, 4)$,

$$\vec{a}_1' = (1,1,1,1,1) \qquad \vec{a}_2' = (2, \alpha+2, 2, 2, 2)$$
$$\vec{a}_3' = (3, 3, \alpha+2, 3, 3) \qquad \vec{a}_4' = (4, 4, 4, \alpha+2, 4)$$

$\vec{b} = (5, 5, 5, 5, \alpha+2)$ diren.

- Adierazpen matriziala: $\boxed{S \triangleq A \cdot X = b}$ non

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & \alpha+2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & \alpha+2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha+2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \alpha+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ \alpha+2 \end{pmatrix} = b \text{ diren}$$

(4.) Eztabaidatu eta sailkatu sistema $\alpha \in \mathbb{R}$ parametroaren balio desberdinen arabera. (2 puntu)

Aurreko ataletan lortutako emaitzak eta Rouché−Frobenius-en teorema kontuan izanik, ondorengo kasuak aztertu behar dira:

1. Kasua. $\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3\}}$

Kasu honetan, $\det(AM) \neq 0$ da edo gauza bera dena, $\boxed{h(AM) = 5 > h(A) = 4}$. Sistema bateraezina (soluziorik gabeko sistema) da.

2. Kasua. $\boxed{\alpha = k \quad (k = 0, 1, 2)}$

Antzekoak diren hiru kasu daude, guztietan ondokoa betetzen delarik: $\boxed{h(A) = 3 < h(AM) = 4}$.
Ondorioz, hiru kasu hauetan ere sistema bateraezina (soluziorik gabeko sistema) da.
Lehenengo atalean $h(A) = 3$ dela ondorioztatu da. Adibidez, $\alpha = 0$ kasurako ($\alpha = 1, 2$ kasuetan era berean kalkulatzen da) hurrengoa daukagu: $h(AM) = h(C) = 4$

$$AM \underset{F_i \leftarrow F_i - F_1,\, i \in [2,5]}{\sim} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-3 \end{pmatrix} \underset{\alpha=0}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = C$$

3. Kasua. $\boxed{\alpha = 3}$

Oraingoan, ezezagun kopurua n adieraziz: $h(AM) = h(A) = 4 = n$, sistema bateragarri zehaztua (edo determinatua) da, (soluzio bakarra du).
Lehenengo atalean $h(A) = 4$ dela lortu da. Are gehiago: $h(AM) = h(D) = 4$

$$AM \underset{F_i \leftarrow F_i - F_1,\, i \in [2,5]}{\sim} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-3 \end{pmatrix} \underset{\alpha=3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D$$

Laburbilduz:

Kasua	Parametroa	h(*A*)	h(*AM*)	Sailkapena
1	$\forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0,1,2,3\}$	4	5	BATERAEZINA
2	$\alpha = k \quad (k = 0,1,2)$	3	4	BATERAEZINA
3	$\alpha = 3$	4	4	BATERAGARRI ZEHAZTUA (DETERMINATUA)

(5.) Posible denean, ebatzi sistema Gauss-Jordan-en metodoa erabiliz. (2 puntu)

Gauss−Jordan metodoa aplikatuz, ondoren agertzen diren eta errenkada baliokideak diren matrizeak lortzen dira:

$$AM \triangleq (A\,|\,b) \underset{F_i \leftarrow F_i - F_1,\, i\in[2,5]}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-3 \end{array}\right) \underset{\exists\, soluzioa\ \alpha=3 bada}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 \leftarrow \frac{1}{3}F_2 \\ F_3 \leftarrow \frac{1}{2}F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftarrow F_1 - \sum_{k=2}^{4} iF_i}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow S' \triangleq \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Hasierako S sistemaren matrize zabalduan errenkadekiko oinarrizko eragiketak eginez, matrize mailakatu kanoniko bat lortzen da. Matrize hau, S-ren baliokidea den S' sistema baten matrize zabaldua da. Hortaz, soluzio bera daukate:

$$\boxed{S \sim S' \triangleq \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}}$$

Sistemaren **sailkapena** eta **ebazpena** *Mathematica*-k duen `Reduce` agindua erabiliz egin daiteke:

```
In[7]:= sist = {x + 2 y + 3 z + 4 t = 5, x + (2 + a) y + 3 z + 4 t = 5, x + 2 y + (2 + a) z + 4 t = 5, x + 2 y + 3 z + (2 + a) t = 5,
           x + 2 y + 3 z + 4 t = 2 + a};

In[8]:= Reduce[sist, {x, y, z, t}]

Out[8]= a == 3 && x == 5 && y == 0 && z == 0 && t == 0
```
