euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

ÁLGEBRA

ALJEBRA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

BUKAERAKO ARIKETA

2014–2015 Ikasturtea. Lehenengo deialdia: 2015eko urtarrilak 22

Abizenak:	
Izena:	***Taldea:***
Ariketa hau egiteko arauak eGelan argitaratu ziren eta ikasleak ezagutu behar ditu	

1. ORRIA

A ZATIA [3 puntu]

(1º) Askatu C matrizea $A\cdot 3(B+A)\cdot C\cdot B - A\cdot B^2 = A^2\cdot B$ adierazpenetik, A eta B matrize erregularrak izanik.

(2º) Bi matrizeen arteko biderkadura trukakorra bada, beraien alderantzizkoen arteko biderkadura trukakorra al da? Arrazoitu erantzuna.

B ZATIA [7 puntu]

Izan bedi honako matrize zabaldua duen ekuazio linealetako sistema:

$$AM = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & b & a & b & a+b+1 \\ 1 & 3b & a & 2b & 3a+2b+1 \\ 2 & b & 2a & 2b & 2b+2 \\ 1 & 2b & 0 & 2b & a+2b \end{array}\right)$$

Sistema deskribatu, sailkatu eta ebatzi posible denean, $a,b\in\mathbb{R}$ parametro errealen arabera.

---

2. ORRIA

A ZATIA [5 puntu]

Izan bedi honako *Mathematica*-ko kode hau:

```
In[1]:= T = {{2, -1, -1}, {-1, 2, -1}, {-1, -1, 2}};

In[2]:= e = Eigensystem[T]
Out[2]= {{3, 3, 0}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}

In[3]:= u = Orthogonalize[e[[2]]]
```

$$\text{Out[3]=}\ \left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right\},\ \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}},\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\},\ \left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$$

(1º) Kalkulatu T matrizearen determinantea Sarrusen araua erabili gabe.

(2º) Ondorioztatu T matrizearen polinomio karakteristikoa. Arrazoitu erantzuna.

(3º) Posible bada, T matrizea antzekotasunez diagonalizatu. Arrazoitu erantzuna.

(4º) Posible bada, T matrizea ortogonalki diagonalizatu. Arrazoitu erantzuna.

(5º) Kalkulatu T^{33}. Arrazoitu erantzuna.

B ZATIA [5 puntu]

Izan bedi honako matrize zabaldua duen ekuazio linealetako sistema:

$$AM = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(1º) Idatzi emandako sistema era bektorialean**.** Zergatik da sistema hau bateraezina? Emaitza interpretatu.

(2º) Lortu emandako sistemaren soluzio hurbildua. Egindako errorea kalkulatu eta lortutako emaitza interpretatu.

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

ÁLGEBRA

ALJEBRA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

3. ORRIA

A ZATIA [3 puntu]

Izan bedi honako *Mathematica*-ko kode hau:

```
In[1]:= a1 = {m, m + 1, 1}; a2 = {m, 0, 1}; a3 = {1, m, m};

In[2]:= Reduce[x a1 + y a2 + z a3 == {2 + m, 3, m}, {x, y, z}]

Out[2]= (m == -1 && y == -4 - x && z == -3) ||
        ((-1 + m) (1 + m) ≠ 0 && x == (-3 + 5 m - m^2)/(-1 + m^2) && y == -3 + m + m x && z == 2 + 4 m - m^2 - m x - m^2 x)

In[3]:= Reduce[x a1 + y a2 + z a3 == {0, 0, 0}, {x, y, z}]

Out[3]= ((m == -1 || m == 1) && y == m x && z == -x - m x) || ((-1 + m) (1 + m) ≠ 0 && x == 0 && y == 0 && z == 0)
```

(1º) Idatzi, adierazpen orokorra erabiliz, aurreko kodean deskribatzen den sistema ez-homogeneoa.

(2º) Sailkatu eta ebatzi esandako sistema posible denean.

(3º) Aztertu F sistema lotua ala askea den $\alpha \in \mathbb{R}$ parametroaren arabera

$$F = \left\{ \vec{t}_1 = (\alpha, \alpha, 1), \vec{t}_2 = (1, 0, \alpha), \vec{t}_3 = (1, \alpha + 1, \alpha) \right\}$$

B ZATIA [7 puntu]

Izan bitez honako matrize hauek:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = A - \mathbb{I}_5$$

(1º) ¿B periodikoa al da?, ¿B inbolutiboa al da?, ¿B idenpotentea al da?, ¿B nilpotentea al da?, ¿B ortogonala al da? Arrazoitu erantzunak.

(2º) Kalkulatu A^{-1}.

(3º) Kalkulatu $A^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

---

4. ORRIA

A ZATIA [2 puntu]

Frogatu $\vec{x}$ bektorea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizearen λ balio propioari elkartutako bektore propioa bada, orduan $\vec{x}$, $A^p \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizearen λ^p balio propioari elkartutako bektore propioa dela $\forall p \in \mathbb{N}$.

B ZATIA [8 puntu]

Izan bedi $\left(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), <,>\right)$ espazio bektorial euklidearra, ohiko biderkadura eskalarrekin: $\langle A,B\rangle = aztarna\left(A^T \cdot B\right)$. Izan bedi honako azpiespazio hau:

$$S = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,/\, A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A \right\}$$

(1º) Lortu S-ren oinarri bat (B_S) eta S-ren dimentsioa.

(2º) Lortu S-ren oinarri ortogonal bat (B_{OT}) eta S-ren oinarri ortonormal bat (B_{ON}).

(3º) Kalkulatu $S^\perp$ azpiespazio ortogonalaren ekuazio parametrikoak. Zein da $S^\perp$-ren dimentsioa?

(4º) Osatu B_S oinarria $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ren B^* oinarri bat lortu arte.

(5º) Kalkulatu biderkadura eskalarraren Gram matrizea $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ren B^* oinarriarekiko.

(6º) Kalkulatu $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen proiekzioa S azpiespazioaren gainean. Lortutako emaitza interpretatu.
