eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

BUKAERAKO ARIKETA: EBAZPENA

2014–2015 Ikasturtea. Lehenengo deialdia: 2015eko urtarrilak 22

1. ORRIA

A ZATIA [3 puntu]

(1) Askatu C matrizea $A\cdot 3(B+A)\cdot C\cdot B-A\cdot B^2=A^2\cdot B$ adierazpenetik, A eta B matrize erregularrak izanik.

$$A\cdot 3(B+A)\cdot C\cdot B-A\cdot B^2=A^2\cdot B$$
$$3A\cdot(B+A)\cdot C\cdot B=A^2\cdot B+A\cdot B^2=\left(A^2+A\cdot B\right)\cdot B$$

M matrizea erregularra bada $\exists M^{-1}\ /\ M\cdot M^{-1}=M^{-1}\cdot M=\mathbb{I}$

Aurreko berdintzako alde biak eskuinetik B^{-1} matrizeaz biderkatuz:

$$3A\cdot(B+A)\cdot C=\left(A^2+A\cdot B\right)=A\cdot(A+B)$$

Aurreko berdintzako alde biak ezkerretik A^{-1} matrizeaz biderkatuz

$$3(B+A)\cdot C=(A+B)=(B+A)$$

Ondorioz, identitate matrizea $\mathbb{I}$ bezala adieraziz ondorengoa dugu:

$$\underbrace{3C}_{\mathbb{I}}\cdot(B+A)=(B+A)\Rightarrow \boxed{C=\tfrac{1}{3}\cdot\mathbb{I}}$$

---

(2) Bi matrizeen arteko biderkadura trukakorra bada, beraien alderantzizkoen arteko biderkadura trukakorra al da? Arrazoitu erantzuna.

Izan bitez $A,B\in\mathbb{M}(\mathbb{R})$, $A\cdot B=B\cdot A$ berdintza betetzen duten bi matrize erregular, ondorioz:

$$(A\cdot B)^{-1}=(B\cdot A)^{-1}\Rightarrow B^{-1}\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot B^{-1}$$

Hortaz, A eta B matrizeen **alderantzizko matrizeak** ere biderketarekiko **trukakorrak dira.**

B ZATIA [7 puntu]

Izan bedi honako matrize zabaldua duen ekuazio linealetako sistema:

$$AM=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & b & a & b & a+b+1 \\ 1 & 3b & a & 2b & 3a+2b+1 \\ 2 & b & 2a & 2b & 2b+2 \\ 1 & 2b & 0 & 2b & a+2b \end{array}\right)$$

Sistema deskribatu, sailkatu eta ebatzi posible denean, $a,b\in\mathbb{R}$ parametro errealen arabera.

AM matrizean errenkadekiko oinarrizko eragiketak eginez:

$$AM \underbrace{\sim}_{\substack{F_{i1}(-1)\ i=2,4\\ F_{31}(-2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & b & a & b & a+b+1 \\ 0 & 2b & 0 & b & 2a+b \\ 0 & -b & 0 & 0 & -2a \\ 0 & b & -a & b & b-1 \end{array}\right) \underbrace{\sim}_{F_{24}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & b & a & b & a+b+1 \\ 0 & b & -a & b & b-1 \\ 0 & -b & 0 & 0 & -2a \\ 0 & 2b & 0 & b & 2a+b \end{array}\right) \sim$$

$$\underbrace{\sim}_{\substack{F_{12}(-1)\\ F_{32}(1)\\ F_{42}(-2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2a & 0 & a+2 \\ 0 & b & -a & b & b-1 \\ 0 & 0 & -a & b & b-2a-1 \\ 0 & 0 & 2a & -b & 2a-b+2 \end{array}\right) \underbrace{\sim}_{F_3(-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2a & 0 & a+2 \\ 0 & b & -a & b & b-1 \\ 0 & 0 & a & -b & 2a+1-b \\ 0 & 0 & 2a & -b & 2a-b+2 \end{array}\right) \sim$$

$$\underbrace{\sim}_{\substack{F_{43}(-2)\\ F_{23}(1)}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2a & 0 & a+2 \\ 0 & b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & a & -b & 2a+1-b \\ 0 & 0 & 0 & b & b-2a \end{array}\right) \underbrace{\sim}_{F_{34}(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2a & 0 & a+2 \\ 0 & b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b & b-2a \end{array}\right) \sim$$

$$\underbrace{\sim}_{F_{13}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b & b-2a \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\sim}_{F_{13}(-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b & b-2a \end{array}\right)$$

$$|A'| = b^2 a\ ;\ |A'| = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee\ b = 0$$

Erabilitako notazioa: F_{ij} = i eta j zutabeak elkartrukatu.

$\boxed{a\neq 0\neq b}$ betetzen bada sistema **bateragarri determinatua** da, hasierako sistemaren baliokidea den eta ezezagunak (x, y, z, t denotatuko direnak) bakanduta dituen ondokoa sistema lortuz:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b & b-2a \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = a \\ y = \frac{2a}{b} \\ z = \frac{1}{a} \\ t = 1 - \frac{2a}{b} = 1 - y \end{cases}}$$

$\boxed{a = 0 \vee b = 0}$ Rouche- Frobenius-en teorema aplikatuz, sistema **bateraezina** dela lortzen da.

---

2. ORRIA

A ZATIA [5 puntu]

Izan bedi honako *Mathematica*-ko kode hau:

```
In[1]:= T = {{2, -1, -1}, {-1, 2, -1}, {-1, -1, 2}};

In[2]:= e = Eigensystem[T]

Out[2]= {{3, 3, 0}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}

In[3]:= u = Orthogonalize[e[[2]]]
```

Out[3]= $\left\{\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right\}$

<u>Mathematica programako kodearen azterketa.</u>

`In[1]` sarreran sartutako matrizea simetrikoa da, hortaz diagonalizagarria:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ondorioz, $\exists P$ *alderantzikagarria* / $D = P^{-1} \cdot T \cdot P$. `Out[2]` irteeratik ondokoa ondorioztatzen da:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Horretaz gain, `Out[2]` irteeratik ondorengoa dugu:

$$\sigma(T) = \{\lambda_1 = 3\,(k_1 = 2), \lambda_2 = 0\,(k_2 = 1)\}$$

T matrizea simetrikoa denez, antzekotasunez ortogonalki diagonaliza daiteke, hau da, $\exists Q$ *ortogonala* / $D = Q^t \cdot T \cdot Q$. `Out[2]` eta `Out[3]` irteeretatik ondokoa dugu:

$$Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

(1) Kalkulatu T matrizearen determinantea Sarrusen araua erabili gabe.

T matrizea D matrize diagonalaren antzekoa denez ($D=P^{-1}\cdot T\cdot P$), ondokoa dugu:

$$|D|=|P^{-1}\cdot T\cdot P|=|P^{-1}|\cdot|T|\cdot|P|=\frac{1}{|P|}\cdot|T|\cdot|P|=|T|$$

Ondorioz: $\boxed{|D|=|T|=\lambda_1^2\cdot\lambda_2=0}$

---

(2) Ondorioztatu T matrizearen polinomio karakteristikoa. Arrazoitu erantzuna.

T matrizea D matrize diagonalaren antzekoa denez eta antzeko matrizeek polinomio karakteristiko bera daukatenez (3 ordenako identitate matrizea $\mathbb{I}_3$ denotatuz):

$$p(\lambda)=|T-\lambda\cdot\mathbb{I}_3|=|D-\lambda\cdot\mathbb{I}_3|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \Rightarrow \boxed{p(\lambda)=-\lambda\cdot(3-\lambda)^2}$$

Horretaz gain: $p(\lambda)=(-1)^n\cdot(\lambda-\lambda_1)^{k_1}\cdot(\lambda-\lambda_2)^{k_2}\cdot\ \ldots\ \cdot(\lambda-\lambda_p)^{k_p}$ betetzen denez, kasu honetan:

$$p(\lambda)=(-1)^3\cdot(\lambda-0)^1\cdot(\lambda-3)^2 \Rightarrow \boxed{p(\lambda)=-\lambda\cdot(3-\lambda)^2}$$

---

(3) Posible bada, T matrizea antzekotasunez diagonalizatu. Arrazoitu erantzuna.

Mathematica programako kodea aztertzean azaldutako arrazonamendua erabiliz:

$$P=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

(4) Posible bada, T matrizea ortogonalki diagonalizatu. Arrazoitu erantzuna.

Mathematica programako kodea aztertzean azaldutako arrazonamendua erabiliz:

$$Q=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

---

(5) Kalkulatu T^{33}. Arrazoitu erantzuna.

T matrizea D matrize diagonalaren antzekoa denez ($D=P^{-1}\cdot T\cdot P$), ondokoa dugu:

$$T=P\cdot D\cdot P^{-1}\Rightarrow T^2=\left(P\cdot D\cdot P^{-1}\right)^2=P\cdot D\cdot \underbrace{P^{-1}\cdot P}_{I_3}\cdot D\cdot P^{-1}=P\cdot D^2\cdot P^{-1}$$

Prozedura bera jarraituz: $\boxed{T^{33}=P\cdot D^{33}\cdot P^{-1}}$

P^{-1} lortuz eta kalkuluak eginez eskatutako matrizea lor daiteke.

Horretaz gain, T matrizea antzekotasunez ortogonalki diagonalizagarria denez:

$$T^{33}=Q\cdot D^{33}\cdot Q^t$$

$$T^{33}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3^{33} & 0 & 0 \\ 0 & 3^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -\frac{3^{33}}{\sqrt{2}} & -\frac{3^{33}}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 3^{33}\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{3^{33}}{\sqrt{2}} & -\frac{3^{33}}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 3^{32} & -3^{32} & -3^{32} \\ -3^{32} & 2\cdot 3^{32} & -3^{32} \\ -3^{32} & -3^{32} & 2\cdot 3^{32} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{T^{33}=3^{32}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=3^{32}\cdot T}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA · E.U.I.T.I. BILBAO · U.P.V. E.H.U. · BILBOKO I.I.T.U.E. MATEMATIKA APLIKATUAREN SAILA

B ZATIA [5 puntu]

Izan bedi honako matrize zabaldua duen ekuazio linealetako sistema:

$$AM=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

ÁLGEBRA

ALJEBRA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

(1) Idatzi emandako sistema era bektorialean**.** Zergatik da sistema hau bateraezina? Emaitza interpretatu.

Izan bitez hurrengo bektoreak: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ezezagunak *x* eta *y* denotatuz, sistema **era bektorialean** ondokoa da:

$$\boxed{x \cdot \vec{v}_1 + y \cdot \vec{v}_2 = \vec{b}}$$

Aurreko sistema **bateraezina** da, izan ere sistemako koefizienteen matrizea *A* denotatuz ondokoa dugu: $\boxed{rg(AM) = 3 \neq rg(A) = 2}$.

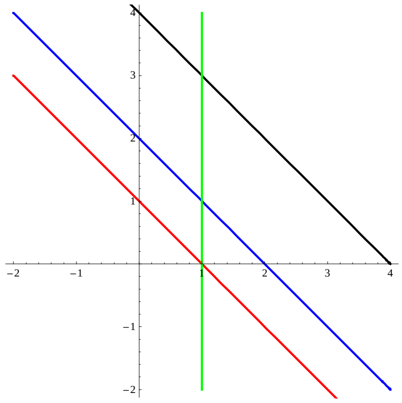
Matrizeetako minoreak aztertuz: $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Sistema bateraezina denez, gai askeak barnean dituen bektorea ezin daiteke ezezagunen koefizienteak barnean dituzten bektoreen konbinazio lineal gisa adierazi. Hau da, gai askeak dituen bektorea ez dago ezezagunen koefizienteek sortzen duten azpiespazioaren barnean:

$$\boxed{\vec{b} \notin L\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = W}$$

Aurreko sistema geometrikoki interpreta daiteke. Sistema lau zuzenez osatua dago, hautako hiru paraleloak izanik, hortaz, lau zuzenek ez dute puntu amankomunik:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 4 \\ 2x + 2y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$



(2) Lortu emandako sistemaren soluzio hurbildua. Egindako errorea kalkulatu eta lortutako emaitza interpretatu.

Izan bedi *W*, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ bektore sistemak sortzen duen $\mathbb{R}^4$-ko azpiespazioa. $\vec{v}_1$ eta $\vec{v}_2$ bektoreak linealki independenteak direnez, W-ren oinarri bat osatzen dute:

$$B_W = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \Rightarrow L\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = W$$

Aurrean adierazi den bezala, sistema bateraezina da, hau da:

$\vec{b} \notin L\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = W$

$\vec{b}$ bektoreak W azpiespazioaren gainean duen proiekzio ortogonala kalkulatuko dugu, hau da, bektore honek W azpiespazioan duen hurbilketarik onena kalkulatuko dugu: $proy_W\, \vec{b} = \vec{b}'$

Hau egiteko, $\vec{b}$ bektoreak W azpiespazioaren oinarri ortogonal bat osatzen duten bektore guztien gainean dituen proiekzio ortogonalak batuko dira.

Ohiko biderkadura eskalarra erabiliz B_W oinarria ortogonala ez dela frogatzen da, izan ere: $\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_2 = 6 \neq 0$

Behar den B_{OW} oinarri ortogonala lortzeko Gram−Schmidt metodoa aplikatzen da:

- $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 = (1, 1, 2, 1)$
- $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \dfrac{\vec{v}_2 \bullet \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1} \cdot \vec{u}_1 = (1, 1, 2, 0) - \dfrac{6}{7} \cdot (1, 1, 2, 1) = \left(\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{2}{7}, -\tfrac{6}{7}\right)$

$$\boxed{B_{OW} = \left\{\vec{u}_1(1, 1, 2, 1), \vec{u}_2\left(\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{7}, \tfrac{2}{7}, -\tfrac{6}{7}\right)\right\}}$$

$\vec{b}'$-ren, hau da, $\vec{b}$ bektoreak W azpiespazioan duen hurbilketarik onenaren, kalkulua:

- $proy_{\vec{u}_1} \vec{b} = \dfrac{\vec{b} \bullet \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1} \cdot \vec{u}_1 = \dfrac{11}{7} \cdot (1, 1, 2, 1)$
- $proy_{\vec{u}_2} \vec{b} = \dfrac{\vec{b} \bullet \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2} \cdot \vec{u}_2 = \dfrac{4/\cancel{7}}{6/\cancel{7}} \cdot \dfrac{1}{7}(1, 1, 2, -6) = \dfrac{2}{21}(1, 1, 2, -6)$

$$\boxed{\vec{b}' = proy_W\, \vec{b} = \sum_{i=1}^{2} proy_{\vec{u}_i}\, \vec{b} = \left(\tfrac{5}{3}, \tfrac{5}{3}, \tfrac{10}{3}, 1\right) \in W}$$

Orain ondoko sistema bateragarria ebazten da: $\boxed{x \cdot \vec{v}_1 + y \cdot \vec{v}_2 = \vec{b}'}$

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \frac{5}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

Soluzioa hurbildua: $\boxed{\begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = 1 \end{cases}}$

Hurbilketa kalkulatzean egindako errorea: $\boxed{\vec{\varepsilon} = \vec{b}' - \vec{b} = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{7}{3}, -\tfrac{4}{3}, 0\right)}$

Errorearen norma: $\boxed{\|\vec{\varepsilon}\| = \sqrt{\dfrac{22}{3}}}$

Hurbilketaren bidez egindako errorearen interpretazioa: $\vec{b} \notin W$ eta $\vec{b}' \in W$ bektoreen arteko distantzia minimoa da, hau da, *W* azpiespazioaren barnean ez dago $\vec{b}$-rekiko distantzia txikiagoa duen bektorerik.

Planteatutako sistema bateragarriaren interpretazio geometrikoa:

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{3} \\ x = 1 \end{cases}$$

---

3. ORRIA

A ZATIA [3 puntu]

Izan bedi honako *Mathematica*-ko kode hau:

```
In[1]:= a1 = {m, m + 1, 1}; a2 = {m, 0, 1}; a3 = {1, m, m};

In[2]:= Reduce[x a1 + y a2 + z a3 == {2 + m, 3, m}, {x, y, z}]

Out[2]= (m == -1 && y == -4 - x && z == -3) ||
        ((-1 + m) (1 + m) ≠ 0 && x == (-3 + 5 m - m^2)/(-1 + m^2) && y == -3 + m + m x && z == 2 + 4 m - m^2 - m x - m^2 x)

In[3]:= Reduce[x a1 + y a2 + z a3 == {0, 0, 0}, {x, y, z}]

Out[3]= ((m == -1 || m == 1) && y == m x && z == -x - m x) || ((-1 + m) (1 + m) ≠ 0 && x == 0 && y == 0 && z == 0)
```

(1) Idatzi, adierazpen orokorra erabiliz, aurreko kodean deskribatzen den sistema ez-homogeneoa.

F sistemako bektoreak `In[1]` sarreran definitutako a1, a2 eta a3 bektoreen koordenatuen ordena aldatuz eta *m* parametroa *α*-z ordezkatuz lortu dira.

`In[1]` sarreran a1, a2 eta a3 bektoreak definitzen dira, `In[2]` sarreran agertzen den Reduce funtzioan agertzen diren **x**, **y**, **z** ezagunen koefizienteak barnean dituzten bektoreak, hain zuzen ere. `In[2]` sarreran ondoko adierazpen orokorra duen sistema planteatzen da:

$$\boxed{\begin{cases} mx + my + z = m + 2 \\ (m+1)x + mz = 3 \\ x + y + mz = m \end{cases}}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA E.U.I.T.I. BILBAO U.P.V. E.H.U. BILBOKO I.I.T.U.E. MATEMATIKA APLIKATUAREN SAILA

---

(2) Sailkatu eta ebatzi esandako sistema posible denean.

`Reduce` funtzioak irteeran, (`Out[2]`-an), funtzioak argumentutzat duen sistema bateragarria izateko dauden kasu desberdinak agertzen dira, hortaz:

- $\boxed{m = -1}$ bada, sistema **bateragarri indeterminatua da,** bere soluzioa ondorengoa izanik:

$$\boxed{\begin{cases} y=-(x+4) \\ z=-3 \end{cases} \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$

- $\boxed{m\neq 1 \wedge m\neq -1}$ bada, sistema **bateragarri determinatua da,** bere soluzioa ondorengoa izanik:

$$\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{-3+5m-m^2}{-1+m^2} \\ y=-3+m+mx \\ z=2+4m-m^2-mx-m^2x \end{cases} \xrightarrow{garatuz} \begin{cases} x=\dfrac{-3+5m-m^2}{-1+m^2} \\ y=\dfrac{3-4m+2m^2}{-1+m^2} \\ z=\dfrac{-2+m}{-1+m} \end{cases}}$$

- $\boxed{m=1}$ bada, hortaz , sistema **bateraezina** da.

---

(3) Aztertu F sistema lotua ala askea den $\alpha\in\mathbb{R}$ parametroaren arabera

$$F=\left\{\vec{t}_1=(\alpha,\alpha,1),\vec{t}_2=(1,0,\alpha),\vec{t}_3=(1,\alpha+1,\alpha)\right\}$$

`In[3]` sarrerako `Reduce` funtzioan `a1`, `a2` eta `a3` bektoreek sortzen duten bektore sistema m parametroaren arabera askea edo lotua den aztertzen da, konbinazio linealaren koefizienteak **x**, **y**, **z** izanik. Bektore hauen eta emandako sistemaren arteko erlazioa kontuan izanik, azterketa F-ra heda daiteke:

Ondorioz:

- $\boxed{\alpha=1\vee\alpha=-1}$ bada, ***F* lotua** da, sistema bateragarri indeterminatua baita:

$$\boxed{\begin{cases} y=mx \\ z=-x-mx \end{cases} \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$

- $\boxed{\alpha\neq 1\wedge\alpha\neq -1}$ bada, ***F* askea** da, sistema homogeneoa bateragarri determinatua baita:

$$\boxed{x=y=z=0}$$

B ZATIA [7 puntu]

Izan bitez honako matrize hauek:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=A-\mathbb{I}_5$$

(1) ¿B periodikoa al da?, ¿B inbolutiboa al da?, ¿B idenpotentea al da?, ¿B nilpotentea al da?, ¿B ortogonala al da? Arrazoitu erantzunak.

B matrizearen ondoz ondoko berreturak kalkulatuz:

$$B^2=\begin{pmatrix}0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=O_{5\times5}$$

Ondorioz, 5 ordenako matrize nulua $O_{5\times5}$ denotatuz:

$$\boxed{B^n=O_{5\times5}\quad \forall n\in\mathbb{N}\ /\ n\geq 3}$$

Emaitza hauek erabiliz B matrizeari buruzko ondoko baieztapenak egin daitezke:

- ez da matrize **periodikoa,** izan ere $\boxed{\nexists p\in\mathbb{N}\ /\ B^{p+1}=B}$
- **ez** da matrize **inbolutiboa,** izan ere $\boxed{B^2\neq \mathbb{I}_5}$
- **ez** da matrize **idenpotentea,** izan ere $\boxed{B^2\neq B}$
- Matrize **nilpotentea** da, izan ere $\boxed{\exists p\in\mathbb{N}\ /\ A^p=O_{n\times n}}$, $\boxed{p=3}$ nilpotentzia indizea izanik.
- **ez** da **ortogonala,** izan ere $\boxed{|B|=0}$ (errenkada nulu bi daude)

---

(2) Kalkulatu A^{-1}.

n ordenako A matrize karratua alderantzikagarria da baldin eta soilik baldin errenkadekiko (edo zutabeekiko) $\mathbb{I}_n$ identitate matrizearen matrize baliokidea bada.

Ondorioz, ondorengo matrizean errenkadekiko oinarrizko eragiketak eginez:

$$M=\left(A\ \ |\ \ \mathbb{I}_5\right)=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1&-1&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\underbrace{\sim}_{\substack{F_{54}(-1)\\F_{23}(1)}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underbrace{\sim}_{F_{12}(1)}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \left(\mathbb{I}_5 \mid A^{-1} \right)$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(3) Kalkulatu $A^{-n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

A^{-1} matrizearen ondoz ondoko berreturak kalkulatuz:

$$A^{-2} = \left(A^{-1}\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-3} = \left(A^{-1}\right)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-4} = \left(A^{-1}\right)^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Indukzio metodoaren aplikazioagatik ondorengo adierazpena lor daiteke:

$$\boxed{A^{-n}=\left(A^{-1}\right)^{n}=\begin{pmatrix}1 & n & \frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0\\ 0 & 1 & n & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -n & 1\end{pmatrix}}$$

$\boxed{a_{13}=\sum_{i=1}^{n} n=\frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n\in\mathbb{N}}$ betetzen dela kontuan izanik.

---

4. ORRIA

A ZATIA [2 puntu]

Frogatu $\vec{x}$ bektorea $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizearen λ balio propioari elkartutako bektore propioa bada, orduan $\vec{x}$, $A^p\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizearen λ^p balio propioari elkartutako bektore propioa dela $\forall p\in$ □ .

Izan bedi $\vec{x}$ bektorea $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizearen λ balio propioari elkartutako bektore propioa.

Hortaz: $\boxed{A\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\vec{x}}$

Aurreko berdintza A matrizeagatik biderkatuz: $A^2\cdot\vec{x}=\lambda\cdot\underbrace{A\cdot\vec{x}}_{\lambda\cdot\vec{x}}=\lambda^2\cdot\vec{x}$

Prozesua p aldiz errepikatuz, ondokoa dugu: $\boxed{A^p\cdot\vec{x}=\lambda^p\cdot\vec{x}}\quad\forall p\in\mathbb{N}$

Azken berdintzatik $\vec{x}$ bektorea $A^p\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizearen λ^p balio propioari elkartutako bektore propioa ere dela ondorioztatzen da.

B ZATIA [8 puntu]

Izan bedi $\left(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),<,>\right)$ espazio bektorial euklidearra, ohiko biderkadura eskalarrekin: $\langle A,B\rangle=aztarna\left(A^T\cdot B\right)$. Izan bedi honako azpiespazio hau:

$$S=\left\{A\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\,/\,A\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot A\right\}$$

(1) Lortu S-ren oinarri bat (B_S) eta S-ren dimentsioa.

<u>*S*-ren oinarri baten lorpena</u>.

$$\forall A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in S: \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} a=a+c \\ a-b=b+d \\ c=-c \\ c-d=-d \end{cases}$$

$$\forall A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in S: \quad \begin{cases} a-2b=d \\ c=0 \end{cases}$$

Ondorioz:

$$\boxed{S=\left\{A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})\ /\ d=a-2b\wedge c=0\right\}}$$

$$\boxed{S=\left\{A=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-2b \end{pmatrix}/\ a,b\in\mathbb{R}\right\}}$$

S-ko bektore generiko bat azpiespazioko bektoreen konbinazio lineal gisa adieraziz eskatutako oinarria lortzen da:

$$\forall A\in S: \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a-2b \end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B_S=\left\{A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}}$$

Ondorioz, hurrengoa ondoriozta daiteke: $\boxed{\dim S=2}$

---

(2) Lortu *S*-ren oinarri ortogonal bat (B_{OT}) eta *S*-ren oinarri ortonormal bat (B_{ON}).

Lortutako B_S oinarria ohiko biderkadura eskalarra erabiliz ez da ortogonala, izan ere:

$$\langle A_1, A_2\rangle=-2\neq 0\Rightarrow A_1 \not\perp A_2$$

Gram−Schmidt metodoa aplikatuz **oinarri ortogonala** lortzen da:

- $C_1=A_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $C_2=A_2-\dfrac{\langle A_2, C_1\rangle}{\langle C_1, C_1\rangle}\cdot C_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}-\dfrac{(-2)}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{B_{OT}=\left\{C_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}}$$

B_{OT} oinarriko bektoreak beraien normaz zatituz **oinarri ortonormala** lortzen da:

- $\|C_1\| = \sqrt{\langle C_1, C_1 \rangle} = \sqrt{2}$
- $\|C_2\| = \sqrt{\langle C_2, C_2 \rangle} = \sqrt{3}$

$$\boxed{B_{ON} = \left\{ N_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}}$$

---

(3) Kalkulatu $S^{\perp}$ azpiespazio ortogonalaren ekuazio parametrikoak. Zein da $S^{\perp}$-ren dimentsioa?

$S^{\perp}$ azpiespazioan, ohiko biderkadura eskalarra erabiliz, S-ko matrizeei ortogonalak diren $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ espazio bektorialeko matrize guztiak daude, hau da:

$$\boxed{S^{\perp} = \left\{ D \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \,/\, \langle D, A \rangle = 0 \right\}}$$

Ondorioz:

$$\forall D = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix} \in S^{\perp} : \begin{cases} \langle D, A_1 \rangle = 0 \\ \langle D, A_2 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\forall D = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix} \in S^{\perp} : \begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f + i = 0 \\ g - 2i = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{S^{\perp} = \left\{ D = \begin{pmatrix} f & g \\ h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) \,/\, f = -i \wedge g = 2i \right\}}$$

$$\boxed{S^{\perp} = \left\{ D = \begin{pmatrix} -i & 2i \\ h & i \end{pmatrix} \,/\, h, i \in \mathbb{R} \right\}}$$

---

(4) Osatu B_S oinarria $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$-ren B^* oinarri bat lortu arte.

$\boxed{\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) = S \oplus S^{\perp}}$ batura zuzena egiaztatzen denez, eskatutako oinarria lortzeko B_S oinarria $S^{\perp}$ azpiespazioaren edozein oinarri erabiliz osa daiteke:

$$\forall D \in S^{\perp} : \begin{pmatrix} -i & 2i \\ h & i \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B_{S^\perp} = \left\{ D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

Hortaz:

$$\boxed{B^* = \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

---

(5) Kalkulatu biderkadura eskalarraren Gram matrizea $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$-ren B^* oinarriarekiko.

B^* oinarriko matrizeen arteko biderkadura eskalar posible guztiak kalkulatuz eta Gram matrizea simetrikoa dela kontuan izanik (biderkadura eskalarra trukakorra delako):

- $\langle A_1, A_1 \rangle = 2$
- $\langle A_1, A_2 \rangle = -2$
- $\langle A_1, D_1 \rangle = 0$
- $\langle A_1, D_2 \rangle = 0$
- $\langle A_2, A_2 \rangle = 5$
- $\langle A_2, D_1 \rangle = 0$
- $\langle A_2, D_2 \rangle = 0$
- $\langle D_1, D_1 \rangle = 6$
- $\langle D_1, D_2 \rangle = 0$
- $\langle D_2, D_2 \rangle = 1$

$$\boxed{G = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

---

(6) Kalkulatu $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrizearen proiekzioa S azpiespazioaren gainean. Lortutako emaitza interpretatu.

Enuntziatuan zehaztutako matrizea aurreko atal batean kalkulatutako oinarri ortogonala osatzen duen matrize bat da, zehatzak izateko C_2 erabiliz denotatutako matrizea da, hau da:

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = C_2 \in B_{OT} \Rightarrow C \in S}$$

Ondorioz, C matrizea S azpiespazioaren barnean dago, hortaz azpiespazioaren gainean duen proiekzioa matrize bera da, hau da:

$$\boxed{C = proy_S\, C}$$
