eman ta zabal zazu

Universidad del país vasco

Euskal herriko unibertsitatea

# AUTOMATIZACIÓN Y CONTROL DE PROCESOS

Nombre / Izena________________________________

1er Apellido / 1. Deitura________________________________

2º Apellido / 2. Deitura________________________________

Grupo / Taldea________________________________

**5 de Noviembre de 2015**

**Duración: 1h 20 m**

**1** Esta ecuación diferencial:

$$3\frac{dx(t)}{dt}+6x(t)=f(t)$$

**1,5 pto.**

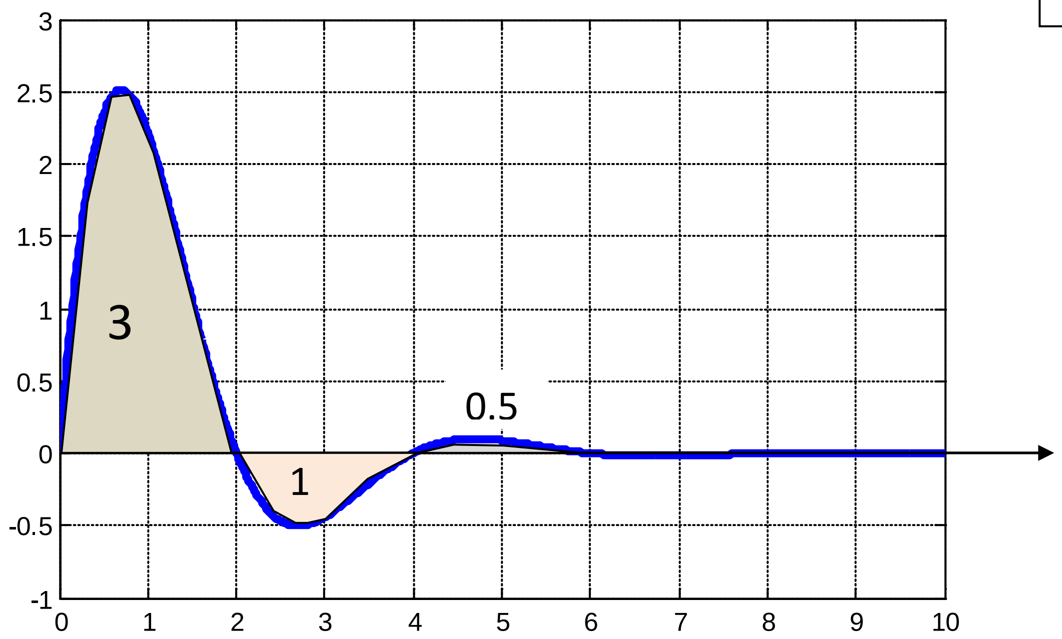
define el comportamiento de un sistema. Siendo x(t) la salida y f(t) la entrada.

Considerando condiciones inicales 0 y f(t) un escalón de 3 unidades, calcular la expresión matemática de x(t) (aplicar Laplace).

**2**

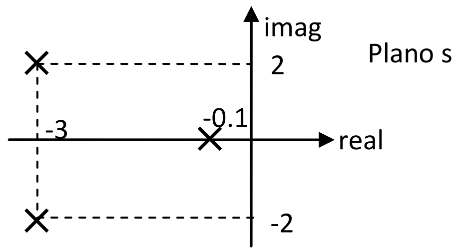
a- En la gráfica se representa la salida de un sistema ante una entrada **impulso unitario**, calcular la Función de Transferencia de dicho sistema.

**1,5 pto.**




b- En el gráfico se representa la ubicación de polos de un sistema. Calcular la Función de Transferencia que le corresponde sabiendo que su ganancia es 5.

**1pto.**



**3** A un horno se le aplica una entrada escalón unitario negativo (-1 Kg/min), y se han conseguido las lecturas de temperatura (variaciones) que aparecen en la tabla..

**1,5 pto.**

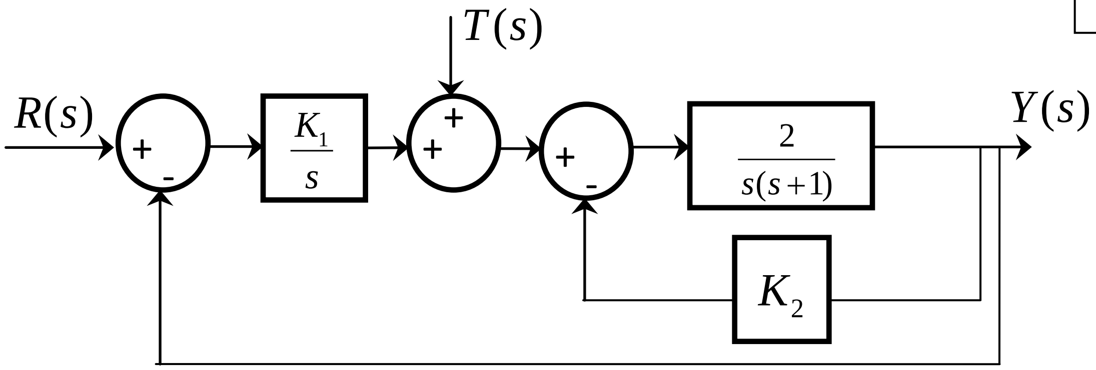
| t(min) | ºC | t(min) | ºC |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 26.0000 | -4.6286 |
| 1.0000 | -0.4758 | 27.0000 | -4.6640 |
| 2.0000 | -0.9063 | 28.0000 | -4.6959 |
| 3.0000 | -1.2959 | 29.0000 | -4.7249 |
| 4.0000 | -1.6484 | 30.0000 | -4.7511 |
| 5.0000 | -1.9673 | 31.0000 | -4.7748 |
| 6.0000 | -2.2559 | 32.0000 | -4.7962 |
| 7.0000 | -2.5171 | 33.0000 | -4.8156 |
| 8.0000 | -2.7534 | 34.0000 | -4.8331 |
| 9.0000 | -2.9672 | 35.0000 | -4.8490 |
| 10.0000 | -3.1606 | 36.0000 | -4.8634 |
| 11.0000 | -3.3356 | 37.0000 | -4.8764 |
| 12.0000 | -3.4940 | 38.0000 | -4.8881 |
| 13.0000 | -3.6373 | 39.0000 | -4.8988 |
| 14.0000 | -3.7670 | 40.0000 | -4.9084 |
| 15.0000 | -3.8843 | 41.0000 | -4.9171 |
| 16.0000 | -3.9905 | 42.0000 | -4.9250 |
| 17.0000 | -4.0866 | 43.0000 | -4.9322 |
| 18.0000 | -4.1735 | 44.0000 | -4.9386 |
| 19.0000 | -4.2522 | 45.0000 | -4.9445 |
| 20.0000 | -4.3233 | 46.0000 | -4.9497 |
| 21.0000 | -4.3877 | 47.0000 | -4.9545 |
| 22.0000 | -4.4460 | 48.0000 | -4.9589 |
| 23.0000 | -4.4987 | 49.0000 | -4.9628 |
| 24.0000 | -4.5464 | 50.0000 | -4.9663 |
| 25.0000 | -4.5896 | | |

a) Calcular la Función de Transferencia (como puede verse el sistema no tiene tiempo muerto)

b) Partiendo de la Función de Transferencia calcular el tiempo de establecimiento ($t_s$ al 5%) que le corresponde y verificarlo con la tabla dada.

**4** Considerando el sistema de la figura:

**2 pto.**

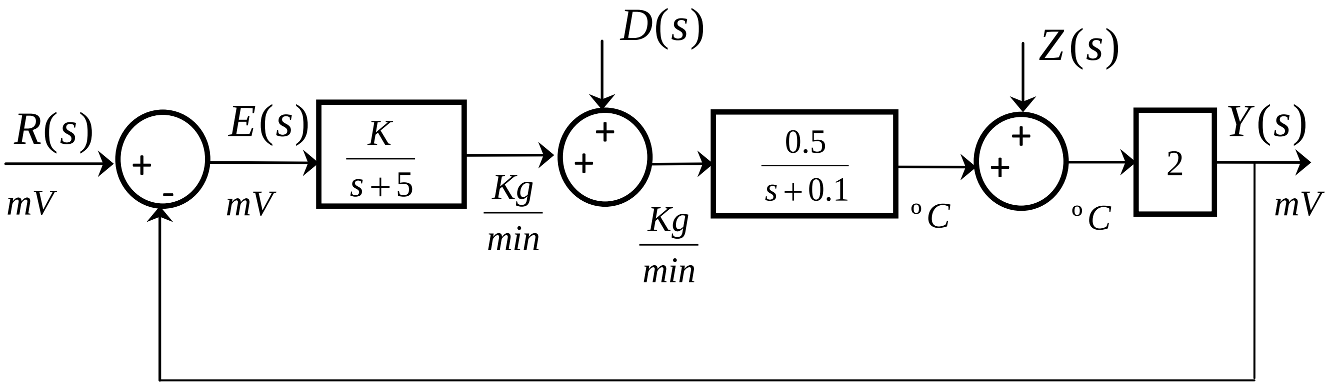



Calcular

a) La expresión de Y(s) en función de R(s) y T(s).
b) ¿Cual debería ser la relación entre K1 y K2 para que el sistema se mantenga estable?
c) ¿Qué ocurre si K1 y K2 son iguales? ¿Dónde se ubican los polos?

**5** Considerando el sistema de la figura:

**2,5 pto.**

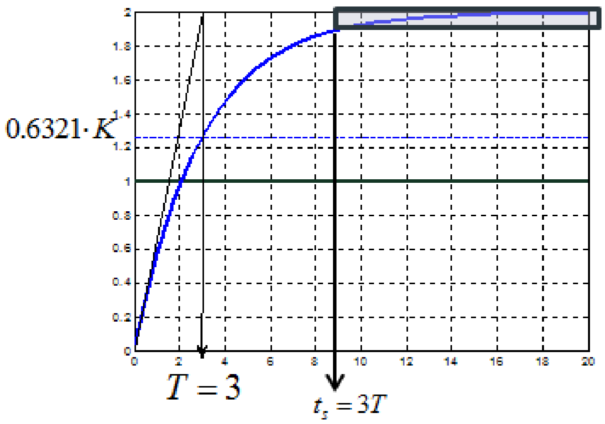


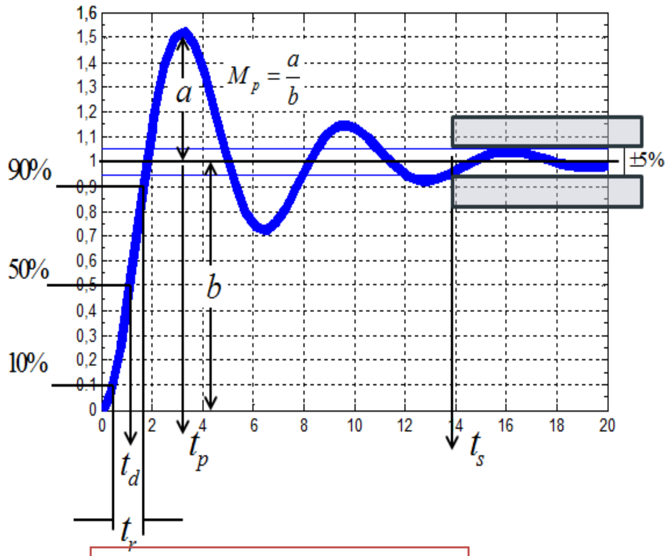

a) Calcular el valor de K que ante una entrada escalón mantiene el error en un 2% (cuando no existen las perturbaciones T(s) y D(s)).

Con el valor de K obtenido en el apartado a:

b) Dibujar la salida del sistema calculando los valores más significativos (Mp, tp, $t_s$ $e_{ss}$ ).
c) Calcular el valor de la salida en estado estacionario ($y_{ss}$), cuando r(t) es un escalón de amplitud 2 unidades (r(t)= 2 $mV$ ), d(t)= -0,5 $\frac{Kg}{min}$ escalón y z(t)= -1 $\frac{Kg}{min}$ escalón.
d) Dibujar la salida del sistema reflejando claramente los errores respecto a la referencia, suponiendo que las perturbaciones entran en momentos diferentes.

## Información:

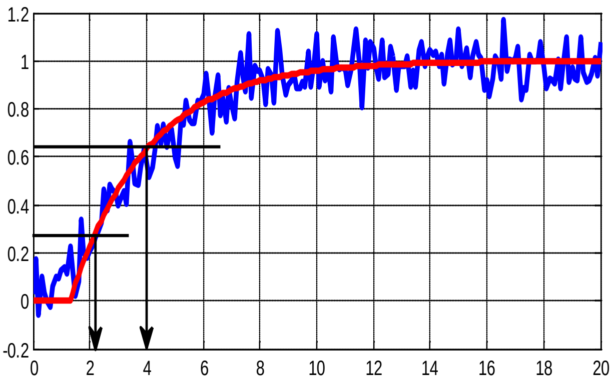



$$M_p=\frac{a}{b}=e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}\ (\%)$$

$$t_p\approx\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$$

$$t_s\approx\frac{3}{\delta\omega_n}\ (5\%)$$



$$T=1.5(t_2-t_1)$$
$$t_m=t_2-T$$

$$\frac{K}{1+Ts}e^{-t_m s}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & .\\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & .\\
\hline
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & .\\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & \cdots & .\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \\
s^{n-n} & k_1 & & &
\end{array}$$

$$b_1=\frac{a_1\cdot a_2-a_0\cdot a_3}{a_1}\qquad b_2=\frac{a_1\cdot a_4-a_0\cdot a_5}{a_1}\qquad b_3=\frac{a_1\cdot a_6-a_0\cdot a_7}{a_1}$$

$$c_1=\frac{b_1\cdot a_3-a_1\cdot b_2}{b_1}\qquad c_2=\frac{b_1\cdot a_5-a_1\cdot b_3}{b_1}$$

| f(t) | F(s) |
|---|---|
| *Inpultsu unitarioa* | 1 |
| 1 | $\frac{1}{s}$ |
| t | $\frac{1}{s^2}$ |
| $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ $n>0$ | $\frac{1}{s^n}$ |
| $t^n$ $n>0$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| $t.e^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| $\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}$ $n>0$ | $\frac{1}{(s+a)^n}$ |
| $t^n.e^{-at}$ $n>0$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ |
| $A.\text{sen}\,wt$ | $A.\frac{w}{s^2+w^2}$ |
| $A.\cos wt$ | $A.\frac{s}{s^2+w^2}$ |

| ENTRADA | | ERROR del SISTEMA | Tipo 0 | Tipo 1 | Tipo 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| Escalón | $R(s)=\frac{1}{s}$ | $e_{ss}=\frac{1}{1+\lim_{s\to 0}G_c(s)G(s)}$ | $e_{ss}$ | $e_{ss}=0$ | $e_{ss}=0$ |
| Rampa | $R(s)=\frac{1}{s^2}$ | $e_{ss}=\frac{1}{\lim_{s\to 0}s\cdot G_c(s)G(s)}$ | $e_{ss}=\infty$ | $e_{ss}$ | $e_{ss}=0$ |
| Parábola | $R(s)=\frac{1}{s^3}$ | $e_{ss}=\frac{1}{\lim_{s\to 0}s^2\cdot G_c(s)G(s)}$ | $e_{ss}=\infty$ | $e_{ss}=\infty$ | $e_{ss}$ |

# Solución Problema 1

$$3\frac{dx(t)}{dt}+6x(t)=f(t) \quad \Longrightarrow \quad 3sX(s)+6X(s)=F(s)$$

$$f(t)=3 \quad \Rightarrow F(s)=\frac{3}{s}$$

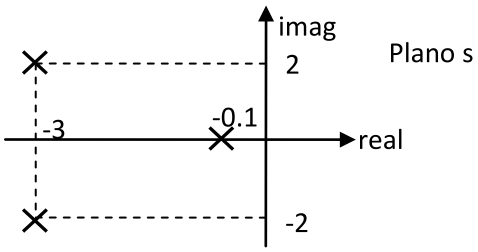
$$X(s)\left[3s+6\right]=\frac{3}{s}$$

$$X(s)=\frac{3}{s\left[3s+6\right]}=\frac{1}{s(s+2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}\begin{cases} A=\left.\frac{1}{s(s+2)}\cdot s\right|_{s=0}=\frac{1}{2} \\ B=\left.\frac{1}{s(s+2)}\cdot(s+2)\right|_{s=-2}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$x(t)=A+Be^{-2t}=\frac{1}{2}\left[1-e^{-2t}\right]$$

# Solución Problema 2

b)




$$G(s)=\frac{K}{(s+0.1)(s+3-2j)(s+3+2j)}$$

$$Y(s)=G(s)\bullet R(s)=\frac{K}{(s+0.1)(s+3-2j)(s+3+2j)}\bullet\frac{1}{s}$$

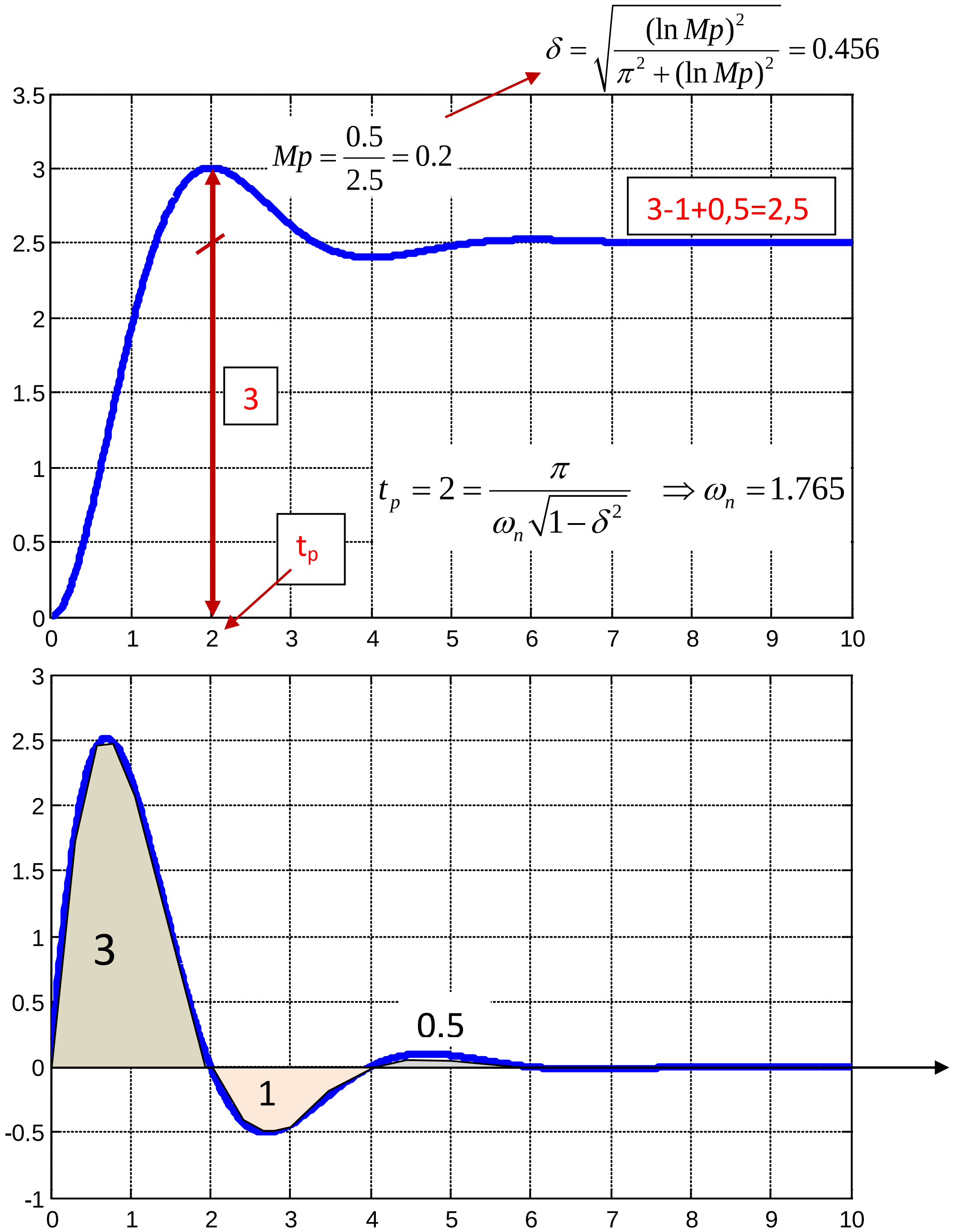
$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{s\to 0}s\bullet Y(s)=\frac{K}{0.1(3-2j)(3+2j)}=\frac{K}{0.1\cdot 13}=5\Rightarrow K=6.5$$

$$G(s)=\frac{6.5}{(s+0.1)(s^2+6s+13)}$$

# Solución Problema 2

a) Si considerásemos que la entrada es un escalón la salida sería la integral de la salida que nos dan.

Integrando la salida obtendríamos:



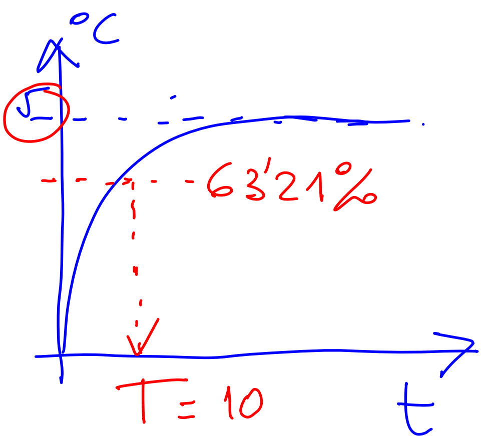

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{2.5 \cdot 1.765^2}{s^2 + 2 \cdot 0.456 \cdot 1.765 s + 1.765^2} = \frac{7.788}{s^2 + 1.61 s + 3.11}$$

**3** A un horno se le aplica una entrada escalón unitario negativo (-1 Kg/min), y se han conseguido las lecturas de temperatura (variaciones) que aparecen en la tabla..

**1,5 pto.**

| t(min) | ºC | t(min) | ºC |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 26.0000 | -4.6286 |
| 1.0000 | -0.4758 | 27.0000 | -4.6640 |
| 2.0000 | -0.9063 | 28.0000 | -4.6959 |
| 3.0000 | -1.2959 | 29.0000 | -4.7249 |
| 4.0000 | -1.6484 | 30.0000 | -4.7511 |
| 5.0000 | -1.9673 | 31.0000 | -4.7748 |
| 6.0000 | -2.2559 | 32.0000 | -4.7962 |
| 7.0000 | -2.5171 | 33.0000 | -4.8156 |
| 8.0000 | -2.7534 | 34.0000 | -4.8331 |
| 9.0000 | -2.9672 | 35.0000 | -4.8490 |
| 10.0000 | -3.1606 | 36.0000 | -4.8634 |
| 11.0000 | -3.3356 | 37.0000 | -4.8764 |
| 12.0000 | -3.4940 | 38.0000 | -4.8881 |
| 13.0000 | -3.6373 | 39.0000 | -4.8988 |
| 14.0000 | -3.7670 | 40.0000 | -4.9084 |
| 15.0000 | -3.8843 | 41.0000 | -4.9171 |
| 16.0000 | -3.9905 | 42.0000 | -4.9250 |
| 17.0000 | -4.0866 | 43.0000 | -4.9322 |
| 18.0000 | -4.1735 | 44.0000 | -4.9386 |
| 19.0000 | -4.2522 | 45.0000 | -4.9445 |
| 20.0000 | -4.3233 | 46.0000 | -4.9497 |
| 21.0000 | -4.3877 | 47.0000 | -4.9545 |
| 22.0000 | -4.4460 | 48.0000 | -4.9589 |
| 23.0000 | -4.4987 | 49.0000 | -4.9628 |
| 24.0000 | -4.5464 | 50.0000 | -4.9663 |
| 25.0000 | -4.5896 | | |

5




$0'6321 \times 5 = 3'1605$

$-3'1605 \xrightarrow{\text{Tabla}} 10$

a) Calcular la Función de Transferencia (como puede verse el sistema no tiene tiempo muerto)

b) Partiendo de la Función de Transferencia calcular el tiempo de establecimiento ($t_s$ al 5%) que le corresponde y verificarlo con la tabla dada.

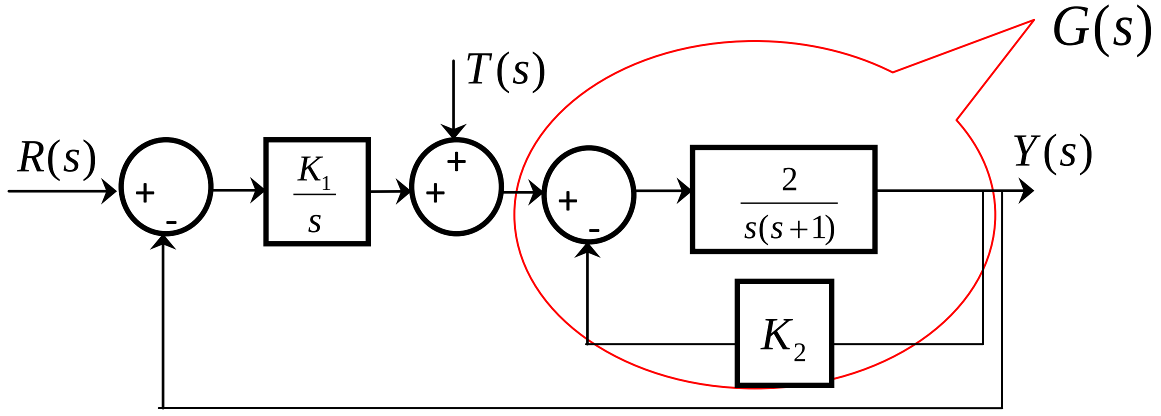
a) $G(s) = \frac{K}{1+Ts} = \frac{5}{1+10s}$ (Sarrera -1)

b) $t_s = 3T = 30$ min

95% → $0'95 \cdot 5 = 4'75$

$-4'75 \xrightarrow{\text{Tabla}} t = 30$ min

# Solución Problema 4




a)

$$G(s)=\frac{\frac{2}{s(s+1)}}{1+\frac{2K_2}{s(s+1)}}=\frac{2}{s(s+1)+2K_2}$$

$$Y(s)=\frac{2K_1}{s\left(s(s+1)+2K_2\right)+2K_1}R(s)+\frac{2s}{s\left(s(s+1)+2K_2\right)+2K_1}T(s)$$

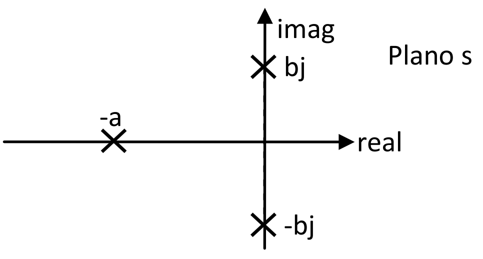
b) $Ek\ Karak \equiv s^3+s^2+2K_2s+2K_1$

| | | |
|---|---|---|
| $s^3$ | $1$ | $2K_2$ |
| $s^2$ | $1$ | $2K_1$ |
| $s^1$ | $2K_2-2K_1$ | $0$ |
| $s^0$ | $2K_1$ | $0$ |

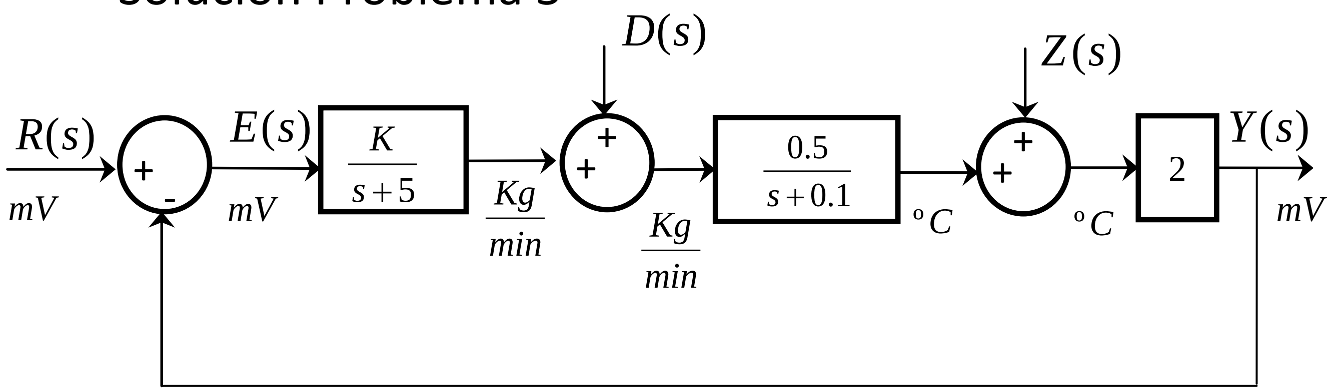
$$2K_2-2K_1>0 \Rightarrow K_2>K_1$$

$$2K_1>0 \Rightarrow K_1>0$$

c) Si K1=K2 sistema críticamente estable



# Solución Problema 5




a)

$$Y(s)=\frac{\dfrac{0.5\cdot 2\cdot K}{(s+5)(s+0.1)}}{1+\dfrac{K}{(s+5)(s+0.1)}}R(s)=\frac{K}{(s+5)(s+0.1)+K}R(s)$$

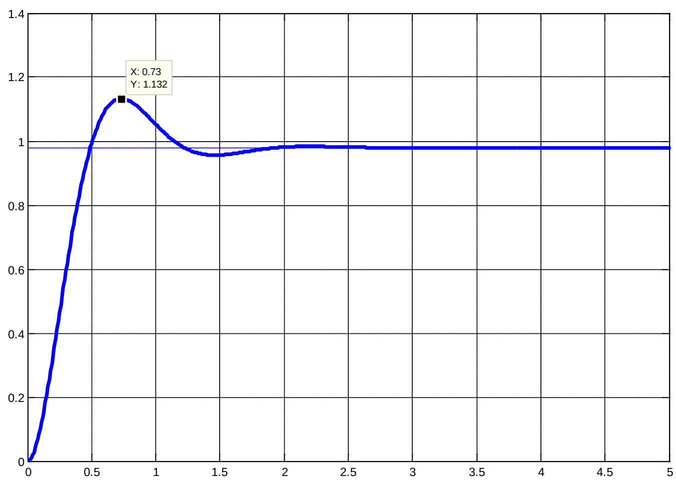
$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)\left[1-\frac{K}{(s+5)(s+0.1)+K}\right]=\frac{(s+5)(s+0.1)}{(s+5)(s+0.1)+K}R(s)$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\cdot E(s)=\lim_{s\to 0}\frac{(s+5)(s+0.1)}{(s+5)(s+0.1)+K}=\frac{0.5}{0.5+K}\leq 0.02$$

$$K=24.5$$

b)

$$Y(s)=\frac{24.5}{(s+5)(s+0.1)+K}R(s)=\frac{24.5}{s^2+5.1s+25}R(s)=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}R(s)$$




$$\omega_n^2=25\rightarrow\omega_n=5$$

$$2\delta\omega_n=5.1\rightarrow\delta=0.51\rightarrow M_p=e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}=0.15$$

$$K\omega_n^2=24.5\rightarrow K=0.98$$

$$t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}=1.17$$

$$ts=\frac{3}{\delta\omega_n}=1.17$$

c)

$$Y(s)=\frac{K}{(s+5)(s+0.1)+K}R(s)+\frac{(s+5)}{(s+5)(s+0.1)+K}D(s)+\frac{2(s+5)(s+0.1)}{(s+5)(s+0.1)+K}Z(s)$$

$$Y(s)=\frac{K}{(s+5)(s+0.1)+K}\cdot\frac{2}{s}+\frac{(s+5)}{(s+5)(s+0.1)+K}\cdot\frac{-0.5}{s}+\frac{2(s+5)(s+0.1)}{(s+5)(s+0.1)+K}\cdot\frac{-1}{s}$$

$$y_{ss}=\lim_{s\to o}s\cdot\left(\frac{K}{(s+5)(s+0.1)+K}\cdot\frac{2}{s}+\frac{(s+5)}{(s+5)(s+0.1)+K}\cdot\frac{-0.5}{s}+\frac{2(s+5)(s+0.1)}{(s+5)(s+0.1)+K}\cdot\frac{-1}{s}\right)$$

$$y_{ss}=\frac{2K}{0.5+K}-\frac{0.25}{0.5+K}-\frac{1}{0.5+K}=\frac{49}{25}-\frac{0.25}{25}-\frac{1}{25}$$