Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao eman ta zabal zazu Universidad del país vasco Euskal herriko unibertsitatea	**AUTOMÁTICA Y CONTROL** Nombre ______ Izena 1ºApellido ______ 1 Deitura 2º Apellido ______ 2 Deitura	**Curso: 2014/2015** **9/Enero/2015** **Tiempo:** 2h 15min **Grupo** **Taldea**

EJERCICIO 1 (40%)

En la Figura 1.1 se muestra el Lugar de las Raíces correspondiente a una planta de ganancia estática unitaria.

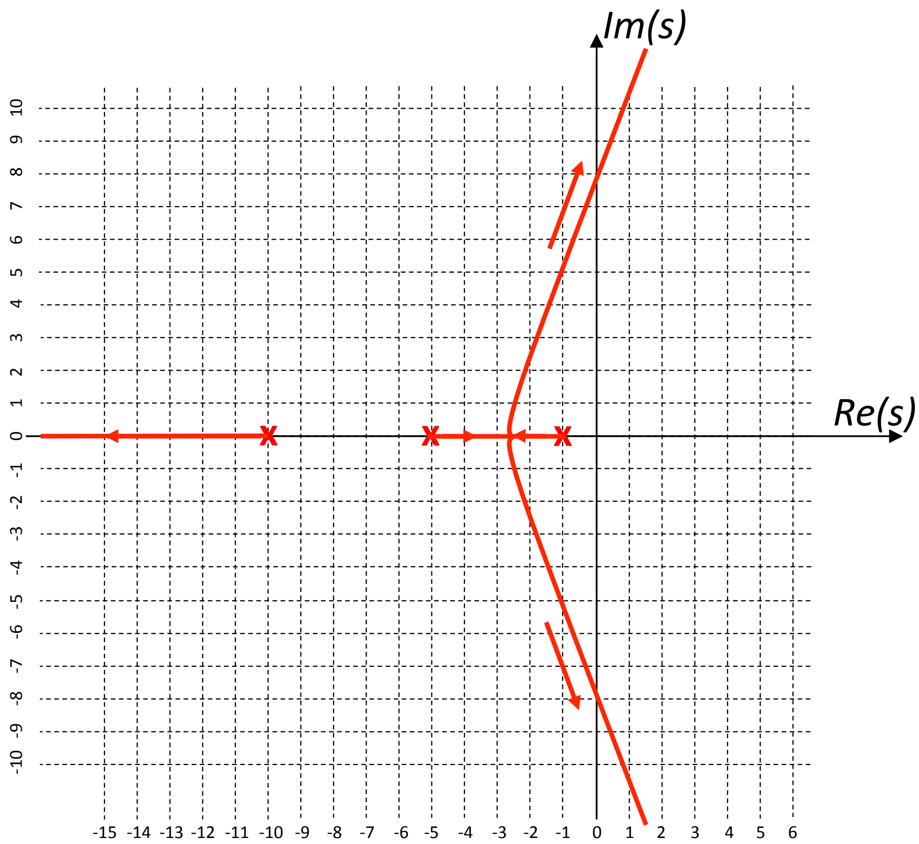


Figura 1.1- Lugar de las raíces

1. Determine la función de transferencia de la planta a controlar.

2. Justifique la estructura del controlador que sería el más adecuado para garantizar un error en estacionario nulo ante entrada escalón, un tiempo de establecimiento inferior a 1 segundo (usando el criterio del 2%) y un sobreimpulso máximo del 4.3%. Haga sus razonamientos basándose en el Lugar de las Raíces y justifique adecuadamente la respuesta.

3. Sintonice el controlador que garantice las especificaciones del apartado anterior.

Solución:

1. Identificación de G(s):

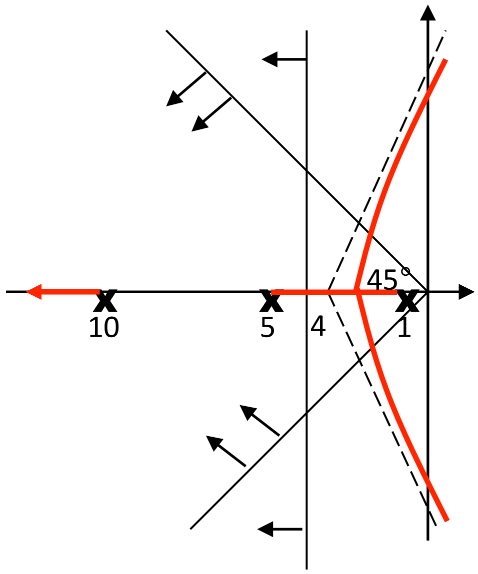
A partir del Lugar de las Raíces se obtiene la estructura: $G(s) = \dfrac{K}{\left((s+10)(s+5)(s+1)\right)}$

Por otra parte, la ganancia estática de G(s) es 1, por lo que:

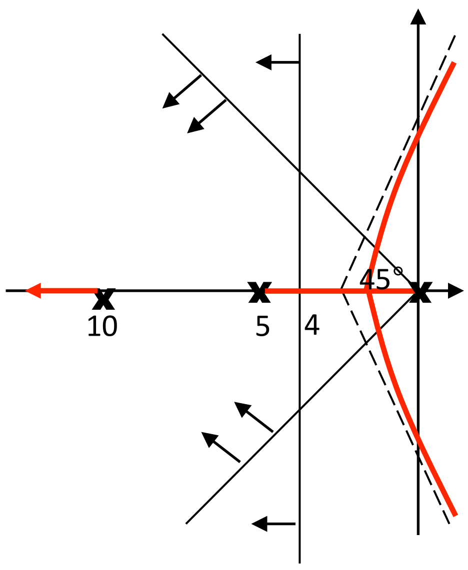
$$\lim_{s\to 0} G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K}{\left((s+10)(s+5)(s+1)\right)} = 1 \to K = 50 \text{ y } G(s) = \frac{50}{\left((s+10)(s+5)(s+1)\right)}$$

2. Las especificaciones impuestas requieren:

- Un integrador en el controlador para garantizar el error en estacionario, dado que la planta es de tipo 0 y se requiere subir el tipo.
- Suponiendo polos complejos conjugados dominantes, su parte real ha de estar, $t_{ss} = \frac{4}{\delta\omega_n} \leq 1 \to \delta\omega_n \geq 4$
- Suponiendo polos complejos conjugados dominantes, el ángulo de los polos ha de ser , $M_p \leq 4.3\% \to \delta \geq 0.707 \to \theta \leq 45º$

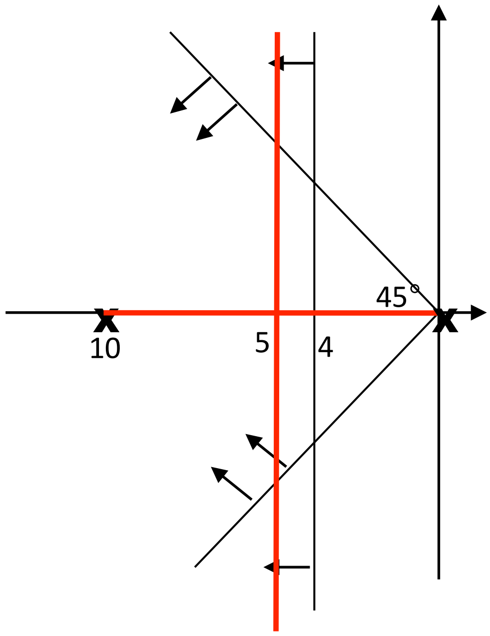


La especificación del error exige un PI o un PID. Como primera opción probamos un PI, que introduce un polo en el origen y un cero que podemos situar sobre el polo más lento de la planta en s = -1 para mejorar el transitorio. Si lo hacemos así, el nuevo lugar de las raíces queda:



El polo en el origen es dominante, lo que desplaza el LR hacia la derecha, incumpliendo aún más las especificaciones. Por tanto el PI no es capaz de cumplirlas.

Si introducimos un PID, al añadir un cero adicional anulando el segundo polo más dominante de la planta, el LR se desplaza hacia la izquierda, quedando únicamente dos polos en lazo abierto. El nuevo lugar de las raíces será:



Vemos ahora que si hay intersección entre el Lugar de las Raíces y la región de diseño, siendo posible definir un rango de valores de K_c que garantice el cumplimiento de las especificaciones.

3. Sintonice el controlador que garantice las especificaciones del apartado anterior.

Anulando los dos polos más dominantes de la planta con los dos ceros que introduce el PID:
$z_1 = 1$ y $z_2 = 10$

$$G_c(s) = K_c\left(1 + sT_d + \frac{1}{sT_i}\right) = K_cT_d\left(\frac{s^2 + s\frac{1}{T_d} + \frac{1}{T_dT_i}}{s}\right) = K_cT_d\,\frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s}$$

Identificando: $(s+1)(s+5) = s^2 + 6s + 5 = s^2 + \frac{1}{T_d}s + \frac{1}{T_iT_d}$

De donde se obtiene: $\begin{array}{l} T_d = 1/6 \\ T_i = 6/5 \end{array}$

La condición para K_c se obtiene al cerrar el lazo y forzar la exigencia del tiempo de establecimiento. Obsérvese que la condición de que los polos en lazo cerrado deben situarse a la izquierda del punto -2 es para sistemas subamortiguados, de modo que la condición para K_c es que el sistema en lazo cerrado tenga sus polos con un amortiguamiento entre 0,707 y 1

$$G_c(s) = \frac{K_c}{6}\frac{(s+5)(s+1)}{s} \rightarrow G_{BC}(s) = \frac{\frac{50}{6}K_c}{s^2 + 10s + \frac{50}{6}K_c} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Imponiendo las condiciones para K_{cmax} y K_{cmin}:

$$K_{c\max} \rightarrow \delta = 0{,}707 \rightarrow s^2 + 1{,}44\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 10s + \frac{50}{6}K_c \rightarrow \omega_n = 7{,}07 rad/s \rightarrow K_{c\max} = 6$$

$$K_{c\min} \rightarrow \delta = 1 \rightarrow s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 10s + \frac{50}{6}K_c \rightarrow \omega_n = 5 rad/s \rightarrow K_{c\min} = 3$$

Por tanto, el controlador pedido resulta: $G_c(s) = K_c\left(1 + s\frac{1}{6} + \frac{1}{s\frac{6}{5}}\right)$ con $3 < K_c < 6$

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao eman ta zabal zazu Universidad del país vasco Euskal herriko unibertsitatea	**AUTOMÁTICA Y CONTROL**	**Curso: 2014/2015** **9/Enero/2015**
	Nombre ______________________ Izena	**Tiempo:** 2h 15min
	1ºApellido ______________________ 1 Deitura	
	2º Apellido ______________________ 2 Deitura	**Grupo** **Taldea**

EJERCICIO 2 (40%)

Los marcapasos electrónicos regulan la velocidad de bombeo del corazón. La Figura 2.1 muestra un sistema de control que incluye la dinámica aproximada asociada al dispositivo marcapasos y al corazón, así como al sensor de latido.

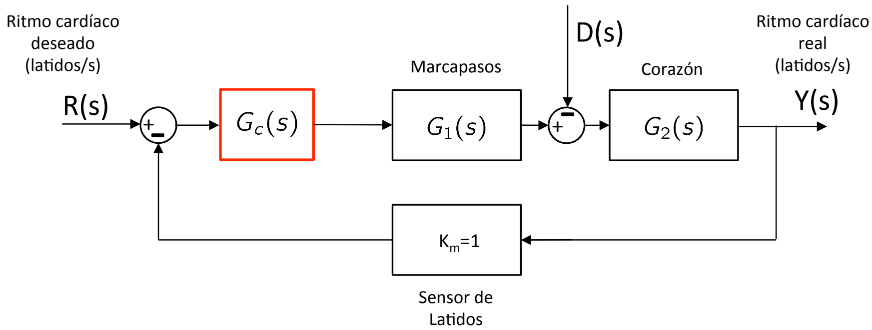


Figura 2.2. -Sistema de control de un marcapasos

Se dispone de la respuesta del corazón, $G_2(s)$, a entrada escalón unitario (Figura 2.2) y el diagrama de Bode del marcapasos, $G_1(s)$, (Figura 2.3), y

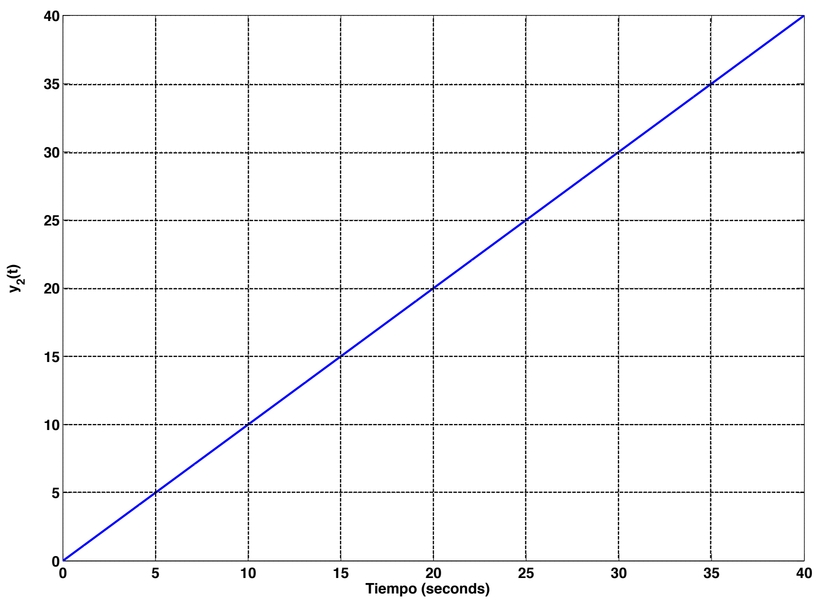


Figura 2.2. -Respuesta a escalón unitario de $G_2(s)$

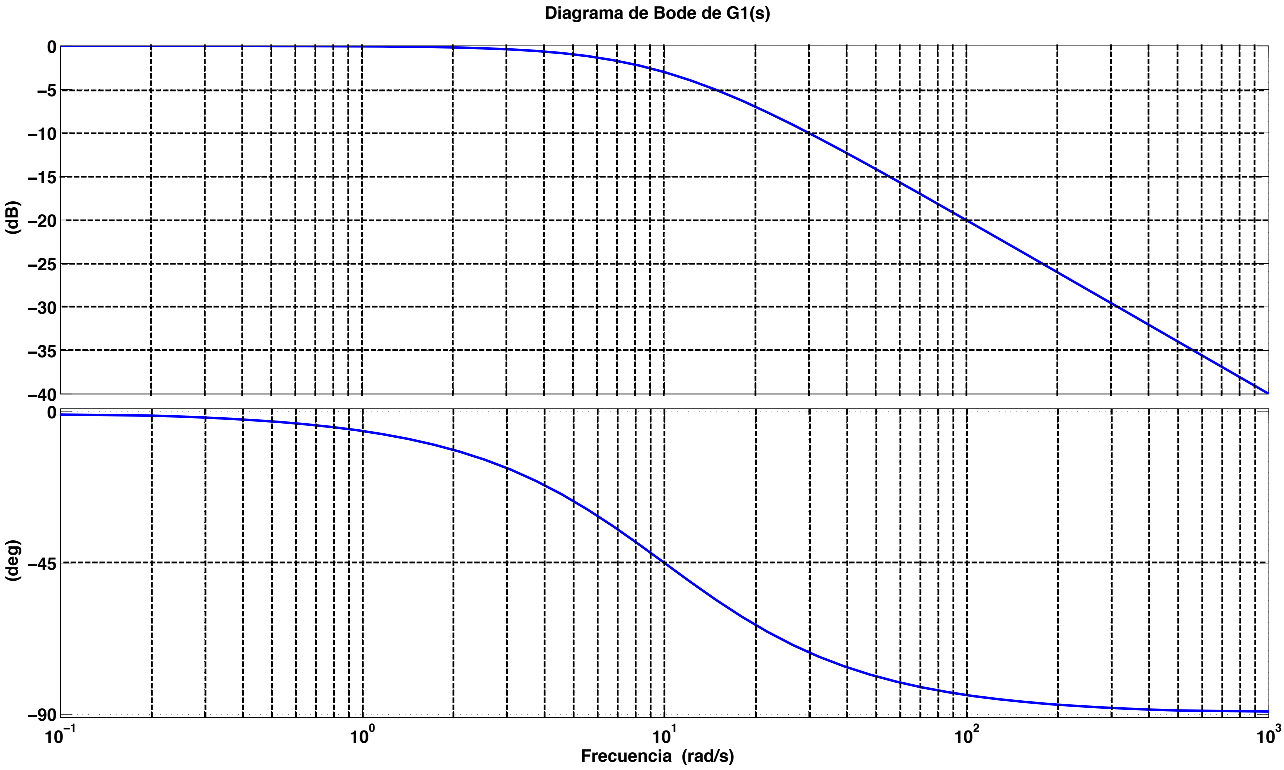


Figura 2.3. -Diagrama de Bode de $G_1(s)$

1. Identifique las funciones de transferencia $G_1(s)$ y $G_2(s)$

2. Justifique la elección del controlador $G_c(s)$ más simple que pueda cumplir las siguientes especificaciones y sintonice sus parámetros.
    - Sobreimpulso del sistema realimentado menor del 10% a cambios en la referencia.
    - Tiempo de establecimiento a entrada escalón en la referencia menor que 6 s (criterio del 5%).
    - Error máximo a perturbación escalón del 20%

3. Suponga ahora que se requiere bajar el tiempo de establecimiento a 0.25 segundos o menos. Compruebe si el controlador diseñado en el apartado anterior sigue siendo válido. En caso negativo, diseñe uno nuevo que lo garantice sin incumplir las especificaciones iniciales.

Solución:

Identificación de $G_1(s)$ de la Figura 2.1:

- Se observa que el diagrama de Bode de módulo presenta una asíntota plana a bajas frecuencias luego G_1 no tiene ni polos ni ceros en s=0. Además, la asíntota de bajas frecuencia es el eje de 0dB, por lo que 20logK=0dB → K=1
- Por otro lado, el diagrama de módulo presenta una única frecuencia de ruptura en 10 rad/s (cambio de pendiente de -20 dB/dec) lo que sugiere que G_1 tiene un polo de primer orden. Esto se confirma en la curva de fase cuya variación va de 0º (a bajas frecuencias) a -90º a altas, por lo que se trata de un polo de primer orden. Si $\omega_r = 10 \rightarrow \tau = 0{,}1s$. Por tanto, $G_1(s) = \frac{10}{0{,}1s+1} = \frac{10}{s+10}$.

Identificación de $G_2(s)$ de la Figura 2.2:

- La respuesta a escalón unitario de $G_2(s)$ es una rampa de pendiente unidad. Por lo tanto, $Y(s)=\frac{1}{s^2} = G_2(s).R(s)$, como la entrada es un escalón unitario, $R(s) = \frac{1}{s} \rightarrow G_2(s) = \frac{1}{s}$.

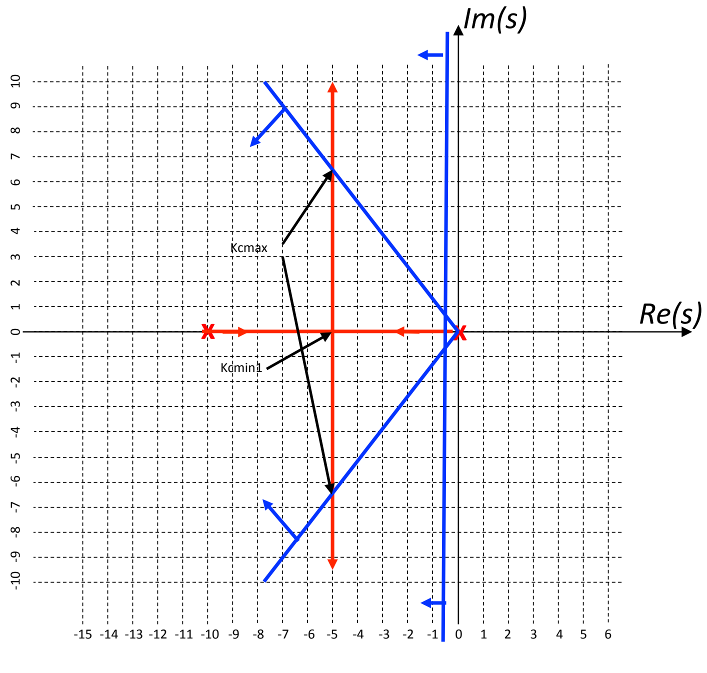
Especificaciones de respuesta:

- M_p a cambios en la referencia menor que el 10%. Dado que el sistema es de segundo orden, el sobre-impulso, para el caso de polos complejos conjugados es $M_p = e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} < 0{,}1 \rightarrow \delta > 0{,}6\ y\ \theta < 54º$
- t_s a cambios en la referencia menor de 6 segundos con el criterio del 5% . Si los polos son complejos conjugados, el tiempo de establecimiento es $t_s(5\%) \approx \frac{3}{\delta\omega_n} < 6 \rightarrow \delta\omega_n > 0{,}5$ donde $\delta\omega_n$ es la parte real de los polos complejos (nótese que si fueran reales no podríamos calcular precisamente el tiempo de establecimiento en función de la posición de los polos).
- Error máximo a perturbación escalón del 20%, es decir e_{ssd} / A < 0,2 siendo A la amplitud del escalón en D(s).

Veamos el tipo de controlador necesario. Para ellos dibujamos las especificaciones del transitorio y el lugar de las raíces del sistema realimentado (ver siguiente figura).

El sistema realimentado es de tipo 1, ya que $G_2(s)$ tiene un integrador, por lo que no existirá error en estado estacionario a cambios escalón en la referencia, aunque sí a perturbación. Como la especificación de respuesta a perturbación es de error finito máximo, no es necesaria la introducción de acción integral.

Veamos si un controlador proporcional es suficiente para cumplir las especificaciones del transitorio. La figura representa la zona del plano s donde deben situarse los polos dominantes así como el lugar de las raíces del sistema realimentado.



Como se observa, hay intersección entre la zona de especificaciones y el Lugar de las Raíces. En principio basta con un controlador Proporcional con ganancia perteneciente al intervalo $K_{cmin}<K_c<K_{cmax}$. Siendo:

- K_{cmin}, Kc para δ=1 (polo real doble)
- K_{cmax}, Kc para δ=0,6 (Mp=10%)

La función de transferencia del sistema en Bucle Cerrado es: $G_{BC}(s) = \frac{10K_c}{s^2+10s+10K_c}$

Por tanto, la ecuación característica de 2º orden es: $s^2 + 10s + 10K_c = s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$
Es decir,

$$10 = 2\delta\omega_n$$
$$10K_c = \omega_n^2$$

Calculando los valores de K_{cmin} (δ=1) y K_{cmax} (δ=0,6):

- $\delta = 0{,}6 \rightarrow s^2 + 1{,}2\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 10s + 10K_c \rightarrow \omega_n = 8{,}3\frac{rad}{s} \rightarrow K_{cmax} = 6{,}9$
- $\delta = 1 \rightarrow s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2 = s^2 + 10s + 10K_c \rightarrow \omega_n = 5\frac{rad}{s} \rightarrow K_{cmin} = 2{,}5$

Por tanto, 2,5 < Kc < 6,9 para cumplir la especificaciones del transitorio. La especificación del error máximo a D(s) escalón impondrá una condición de $K_c$mínima. Veamos si es mayor que 2,5:

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_c(s)}$$

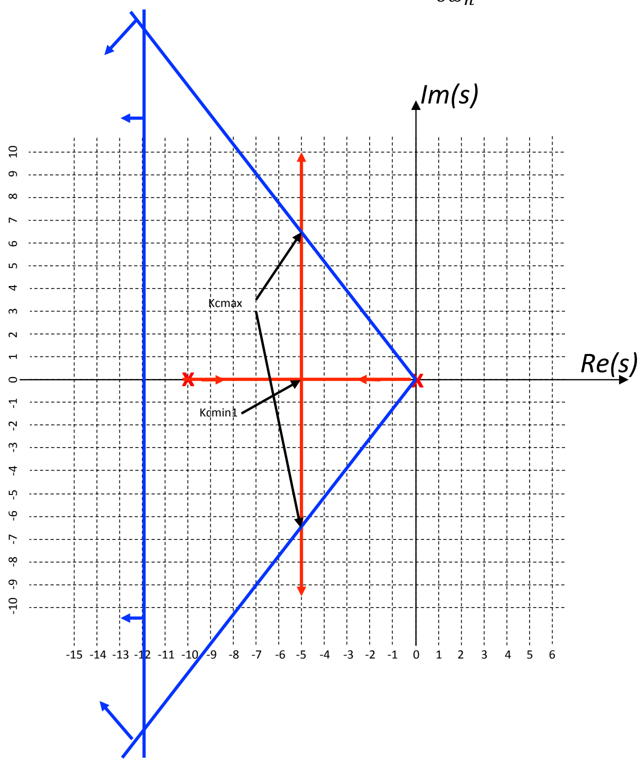
$$\frac{e_{ssd}}{A} = \lim_{s\to 0} s\,E(s)\Big|_{\substack{D(s)=\frac{1}{s}\\ R(s)=0}} = \lim_{s\to 0} s\frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_c(s)}\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{-G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)G_c(s)}$$

$$\left|\frac{e_{ssd}}{A}\right| < 0{,}2;\ \left|\lim_{s\to 0}\frac{-1/s}{1 + \frac{10K_c}{s(s+10)}}\right| < 0{,}2;\ \left|\lim_{s\to 0}\frac{-(s+10)}{s^2 + 10s + 10K_c}\right| < 0{,}2$$

$$\frac{1}{K_c} < 0{,}2 \rightarrow K_c > 5.$$

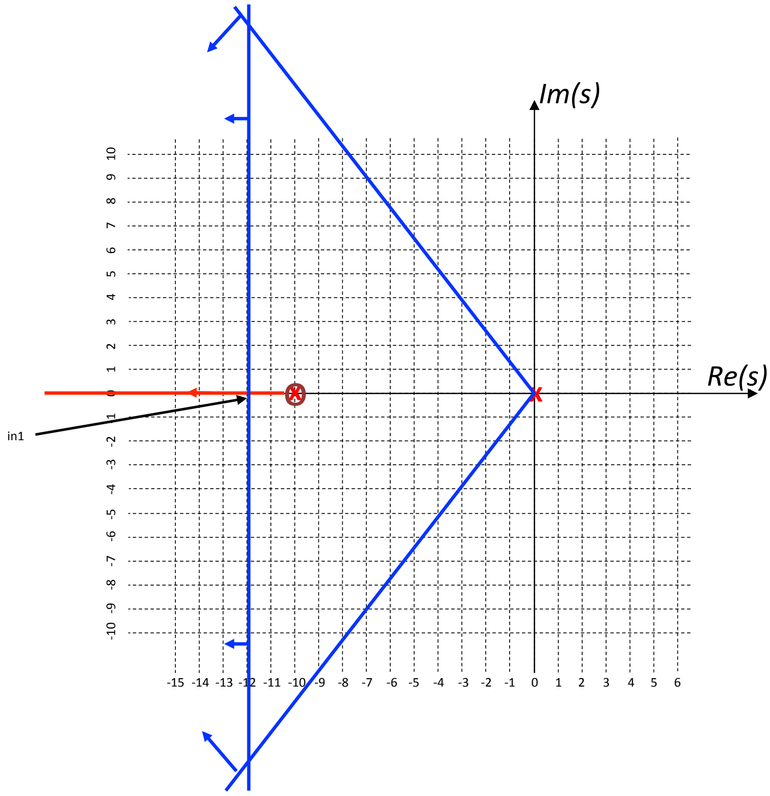
Por tanto, **Gc=Kc siendo 5 < Kc < 6,9**

2. Si ahora se desea que ts sea menor de 0,25s → $t_s(5\%) = \frac{3}{\delta\omega_n} < 0{,}25 \rightarrow \delta\omega_n > 12.$



Se observa que no hay intersección entre el LR y el lugar de las especificaciones. Por tanto, no vale un controlador puramente proporcional, es necesario llevar las ramas del lugar de las raíces hacia la izquierda. Hace falta un controlador PD.

$$G_c(s) = K_c(1 + T_d s) = K_c T_d (s + 1/T_d)$$



Es necesario ubicar el cero del controlador. Si con el cero del PD cancelamos el polo del sistema en s=-10 quedará un sistema de primer orden (y se cumple la especificación de M_p para todo valor de K_c).

$$G_{BA}(s) = \frac{K_c(1 + 0{,}1s)}{s(1 + 0{,}1s)} = \frac{K_c}{s}\ s$$
$$G_{BC}(s) = \frac{K_c}{s + K_c}$$

Si Kc>12 se cumplirá la especificación de tiempo de establecimiento.
Como la acción D no afecta al estado estacionario, la condición para la especificación de error para perturbación seguirá siendo Kc>5, por lo tanto Kc>12 y Td=0,1 será un controlador adecuado.

Ingeniaritza Goi Eskola Teknikoa Escuela Técnica Superior de Ingeniería Bilbao eman ta zabal zazu Universidad del país vasco Euskal herriko unibertsitatea	**AUTOMÁTICA Y CONTROL** Nombre ______________________ Izena 1ºApellido ______________________ 1 Deitura 2º Apellido ______________________ 2 Deitura	**Curso: 2014/2015** **9/Enero/2015** **Tiempo:** 2h 15min **Grupo** **Taldea**

EJERCICIO 3 (20%)

En la Figura 3.1 se representa la respuesta en frecuencia de un sistema.

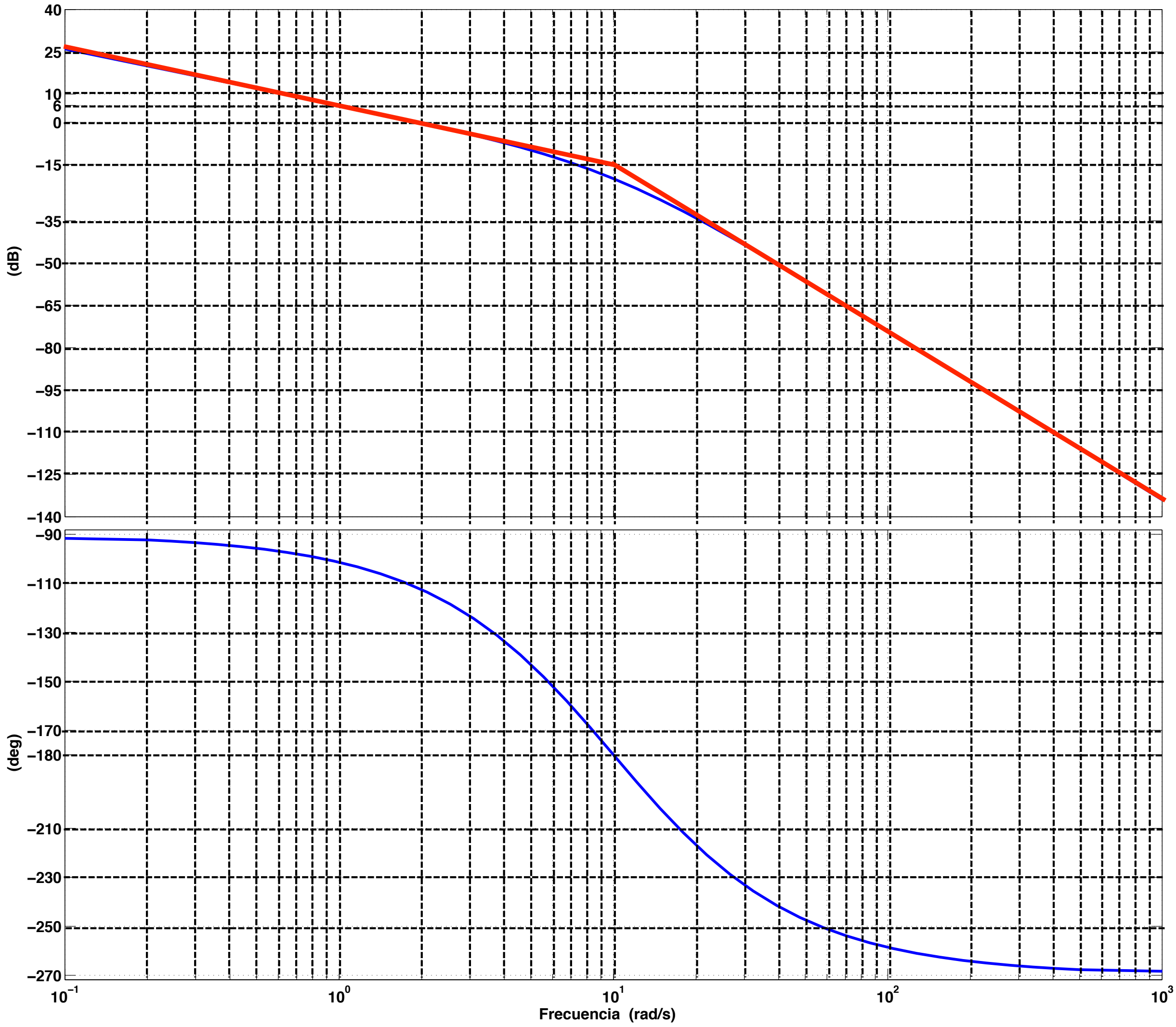


Figura 3.1. -Diagrama de Bode en lazo abierto del sistema

1. Identifique la función de transferencia correspondiente a dicho diagrama de Bode suponiendo que todos los polos y ceros son reales y están en el semiplano izquierdo del plano s.

2. Se realimenta el sistema mediante un sensor de ganancia unitaria. ¿Qué error presentará el sistema realimentado a una entrada rampa de pendiente 2?.

3. Analice la estabilidad relativa del sistema realimentado.

4. ¿Hasta dónde puede aumentarse la ganancia en bucle abierto antes de que el sistema se haga inestable?.

Solución:

1) Identificación de la función de transferencia.

Del diagrama de Bode se observa que **a bajas frecuencias:**

- La pendiente es de -20dB/dec y la fase es de -90º, por lo que G(s) tiene un polo en el origen.
- Para calcular la ganancia, se puede calcular cogiendo el valor del módulo en w=1rad/s. Así,

$$|G(jw)|_{db} \approx 20\log(K) - 20\log(w)$$

$$\omega = 1\frac{rad}{s} \rightarrow 6db \approx 20\log(k) - 0 \rightarrow K = 1{,}995$$

A frecuencias medias:

En la curva de módulo, se observa como en w=10rad/s se ve un cambio de pendiente de -40dB/dec, y en la curva de fase se aprecia cómo a esa frecuencia la fase es de -180º, por lo que se trata de un polo doble (además el enunciado así lo dice, ya que el coeficiente de amortiguamiento es 1).

Por tanto, identificando los polos,

ω	Pendiente que aporta	Pendiente total	Polo/cero
0 rad /s	-20dB/dec	-20db/dec	$1/s$
10 rad/s	-40dB/dec	-60dB/dec	$\frac{1}{(0{,}1s+1)^2}$

Por tanto,

$$G_2(s) = \frac{1{,}995}{s(0{,}1s+1)^2} = \frac{199{,}5}{s(s+10)^2} \approx \frac{200}{s(s^2+20s+100)}$$

b) Cálculo de errores

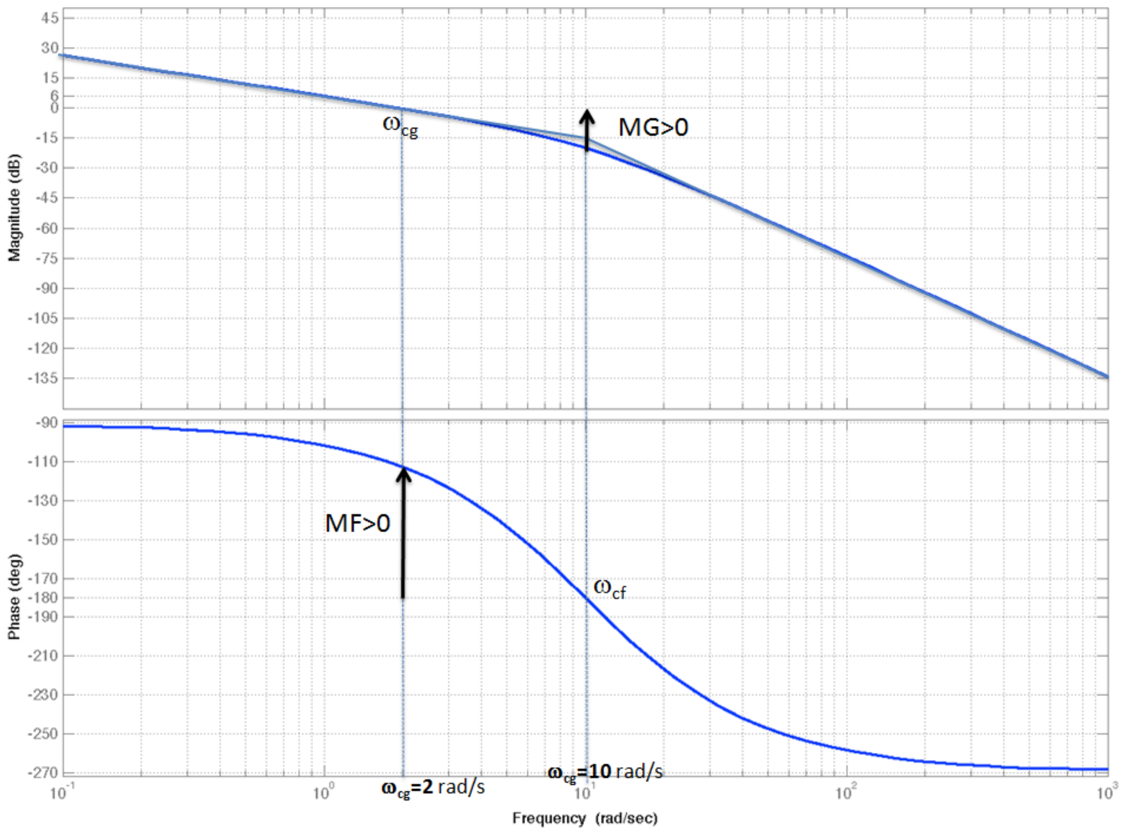
Al realimentarse el sistema mediante un sensor de ganancia unitaria, ahora el Bode representa la función de transferencia en BA, $G_{BA}(s)$.
Para calcular el error en regimen permanente del sistema a entrada rampa en la referencia, utilizamos el coeficiente estático de error en velocidad. Como se trata de un sistema realimentado de tipo 1 ($G_{BA}(s)$ tiene un polo en el origen), el error debido a cambios en la referencia es constante: $e_{ss} = \frac{1}{Kv}$
Siendo: $K_v = \lim_{s\to 0} sG_{BA}(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{200}{s(s^2+20s+100)} = 2$

Por lo que, $e_{ssr} = \frac{1}{Kv} = \frac{1}{2} = 0.5$

c) Para el estudio de estabilidad relativa, calculamos el margen de ganancia y de fase. Estos se pueden calcular directamente en el gráfico:

⇒MF: Es el margen que resta para llegar a 180º cuando el sistema es excitado con la fecuencia crítica ωg que hace que la ganancia sea unitaria. En el gráfico se observa que el margen de fase es positivo y aproximadamente igual a 70º
⇒MG: Es lo que se puede aumentar la ganancia del sistema en BA. Gráficamente se observa MG es aproximadamente 15dB (en el asintótico, 20dB si lo medimos en la curva real).

Al ser el MF>0 y MG>0, esto implica que el sistema es estable en lazo cerrado.



d) En el apartado anterior se ha calculado que el MG es 15dB, con lo que la ganancia del controlador se puede aumentar K=5,62 antes de que el sistema se haga inestable, esto es,

$$20 \log K = 15dB \rightarrow K = 5{,}62$$