eman ta zabal zazu

euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

ÁLGEBRA

ALJEBRA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

BUKAERAKO ARIKETA

2014–2015 Ikasturtea. Ezohiko deialdia: 2015eko ekainak 11

1. ORRIA

A ZATIA [4 puntu]

Izan bedi honako *Mathematica*-ko kode hau:

```
In[1]:= a1 = {m, m + 1, 1}; a2 = {m, 0, 1}; a3 = {1, m, m};

In[2]:= Reduce[x a1 + y a2 + z a3 == {2 + m, 3, m}, {x, y, z}]

Out[2]= (m == -1 && y == -4 - x && z == -3) || ((-1 + m) (1 + m) ≠ 0 && x == (-3 + 5 m - m^2)/(-1 + m^2) && y == -3 + m + m x && z == 2 + 4 m - m^2 - m x - m^2 x)

In[3]:= Reduce[x a1 + y a2 + z a3 == {0, 0, 0}, {x, y, z}]

Out[3]= ((m == -1 || m == 1) && y == m x && z == -x - m x) || ((-1 + m) (1 + m) ≠ 0 && x == 0 && y == 0 && z == 0)
```

Kode honek ematen duen informazioa bakarrik erabiliz, erantzun honako galderei:

(1.) Izan bedi $F=\{\vec{t}_1=(\alpha,\alpha+1,1),\vec{t}_2=(1,\alpha,\alpha),\vec{t}_3=(\alpha,0,1)\}$. Zehaztu $\alpha\in\mathbb{R}$ parametro errealaren zein baliotarako $\vec{v}=(\alpha+2,3,\alpha)\in\mathcal{L}(F)$ betetzen den.

`In[1]` sarreran `a1`, `a2` eta `a3` bektoreak definitzen dira. `In[2]` sarreran agertzen den `Reduce` funtzioarekin ebazten den sistemako **x**, **y**, **z** ezezagunen koefizienteak barnean dituzten bektoreak:

$$x\cdot\vec{a}_1+y\cdot\vec{a}_2+z\cdot\vec{a}_3=\vec{b}=(2+m,3,m)$$

`In[1]` sarreran definitutako bektoreen m parametroa α-gatik aldatuz F sistemako bektoreak lortzen dira. Sistemaren gai askeen bektorean aldaketa bera eginez $\vec{v}$ bektorea daukagu:

$$\boxed{\begin{cases}\vec{t}_1=\vec{a}_1\big|_{m=\alpha} & \vec{t}_2=\vec{a}_3\big|_{m=\alpha}\\ \vec{t}_3=\vec{a}_2\big|_{m=\alpha} & \vec{v}=\vec{b}\big|_{m=\alpha}\end{cases}}$$

Beraz, $m=\alpha$ denean, aurrekoaren sistema analogoa den ondorengo sistema lortzen da: $x\cdot\vec{t}_1+y\cdot\vec{t}_3+z\cdot\vec{t}_2=\vec{v}$ (*)

$\vec{v}=(\alpha+2,3,\alpha)\in\mathcal{L}(F)$ betetzeko, $\vec{v}$ bektorea $\vec{t}_i\,/\,i=1,2,3$ bektoreen konbinazio lineal gisa adieraztea posiblea izan behar da, beraz (*) sistema α parametro errealaren zein baliotarako bateragarria den aztertzea nahikoa da.

Planteatutako `Reduce` funtzioaren, gogoratu `Reduce` funtzioak argumentutzat definituta duen sistema bat bateragarria denean ebazten duela, `Out[2]` irteera aztertuz ondorengo ondorioztatzen da:

- $\boxed{\alpha=-1}$ bada, sistema **bateragarri indeterminatua** da.
- $\boxed{\alpha\neq 1\wedge\alpha\neq -1}$ bada, sistema **bateragarri determinatua** da.
- $\boxed{\alpha=1}$ denean, beraz, sistema **bateraezina** da.

Ondorioz: $\boxed{\vec{v}\in\mathcal{L}(F) \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}-\{1\}}$

(2.) Aztertu $\vec{t}_i\,/\,i=1,2,3$ bektoreak linealki menpekoak diren $\alpha\in\mathbb{R}$ parametroaren arabera.

Sistema bateko bektoreak linealki independenteak (askeak) dira, ondorengo betetzen bada:

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\cdot\vec{v}_i=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda_i=0\quad\forall i$$

Bestela, bektoreak linealki menpekoak edo lotuak dira.

`In[3]` sarrerako `Reduce` funtzioan `a1`, `a2` eta `a3` bektoreek sortzen duten bektore sistema m parametroaren arabera askea edo lotua den aztertzen da, konbinazio linealaren koefizienteak **x**, **y**, **z** izanik. Bektore hauen eta emandako sistemaren arteko erlazioa kontuan izanik, azterketa *F*-ra heda daiteke .

Ondorioz:

- $\boxed{\alpha=1\vee\alpha=-1}$ bada, ***F* lotua** da, sistema bateragarri indeterminatua baita:

$$\boxed{\begin{cases} y=mx \\ z=-x(m+1)\end{cases}\quad\forall x\in\mathbb{R}}$$

- $\boxed{\alpha\neq1\wedge\alpha\neq-1}$ bada, ***F* askea** da, sistema homogeneoa bateragarri determinatua baita:

$$\boxed{x=y=z=0}$$

B ZATIA [6 puntu]

Izan bedi honako koefiziente matrizea duen ekuazio linealetako sistema homogeneoa:

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\1&-1&\alpha+1&\alpha\\1&-2&1&\beta\end{pmatrix}$$

(1.) Eztabaidatu eta ebatzi sistema $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ parametroen arabera.

Lau ekuazio eta lau ezezagun (x, y, z, t adieraziko ditugunak) dituen *S* sistema homogeneo bat daukagu, sistemaren soluzioa $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ parametroen menpe egonik.

Sistema homogeneoa denez, $\boxed{\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$ ***S* bateragarria dela** kontuan izan behar da.

Gauss algoritmoa erabiliz, *A* matrizean errenkadekiko oinarrizko eragiketak aplikatuz:

$$A\underbrace{\sim}_{F_{i1}(-1)\ i=3,4}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&\alpha&\alpha\\0&-1&0&\beta\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F_{42}(1)}A_1=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&\alpha&\alpha\\0&0&0&\beta+1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{F_3\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Leftrightarrow\boxed{\alpha\neq0}}A_2=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&\beta+1\end{pmatrix}\sim$$

$$\underbrace{\sim}_{F_4\left(\frac{1}{\beta+1}\right)\Leftrightarrow\boxed{\beta\neq-1}} A_3=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow S\sim S'=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Erabilitako notazioa:

- F_{ij} : i eta j errenkadak trukatu
- $F_i(\lambda)$: i. errenkada λ eskalarraz biderkatu
- $F_{ij}(\lambda)$: j. errenkada λ eskalarraz biderkatu ondoren i. errenkadari batu

Kasu desberdinen azterketa:

- $\boxed{\alpha\neq0\wedge\beta\neq-1}$ direnean sistema **bateragarri determinatua da** bere soluzio bakarra soluzio nabaria izanik, $\boxed{x=y=z=t=0}$
- $\boxed{\alpha=0}$ denean
  - $\boxed{\beta=-1}$ bada, sistema **bateragarri indeterminatua** da

$$A\sim A_1=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&\alpha&\alpha\\0&0&0&\beta+1\end{pmatrix}\underbrace{=}_{\substack{\alpha=0\\\beta=-1}}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow S\sim S_1=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{S\sim S_1=\begin{cases}y=-t\\z=-(t+x)\end{cases}\quad\forall x,t\in\mathbb{R}}$$

  - $\boxed{\beta\neq-1}$ bada, sistema **bateragarri indeterminatua** da

$$A\sim A_1=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&\alpha&\alpha\\0&0&0&\beta+1\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\alpha=0}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&\beta+1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{S\sim S_2=\begin{cases}y=t=0\\z=-x\end{cases}\quad\forall x\in\mathbb{R}}$$

- $\boxed{\alpha\neq0\wedge\beta=-1}$ direnean, sistema **bateragarri indeterminatua** da

$$A\sim A_2=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&\beta+1\end{pmatrix}\underbrace{=}_{\beta=-1}\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{S\sim S_3=\begin{cases}y=z=-t\\x=0\end{cases}\quad\forall t\in\mathbb{R}}$$

(2.) Aurreko ataleko eztabaidan oinarrituz, aztertu eta arrazoitu zein kasutan A matrizea alderanzgarria den. A^{-1} kalkulatu $\alpha=-1\wedge\beta=0$ direnean.

***A* matrizea alderanzgarria** izateko erregularra izan behar da, hontaz, $h(A)=4$. Hau $\boxed{\alpha\neq0\wedge\beta\neq-1}$ direnean bakarrik betetzen da.

$\boxed{\alpha=-1\wedge\beta=0}$ direnean adibidez, matrizea alderanzgarria da eta bere alderantzizkoa kalkula daiteke:

$$\underbrace{A}_{\substack{\alpha=-1\\ \beta=0}}=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\1&-1&0&-1\\1&-2&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow (A|I_4)=\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0\\1&-1&0&-1&0&0&1&0\\1&-2&1&0&0&0&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\underbrace{\sim}_{F_{i1}(-1)\ i=3,4}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&-1&-1&-1&0&1&0\\0&-1&0&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\underbrace{\sim}_{F_{42}(1)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&-1&-1&-1&0&1&0\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\underbrace{\sim}_{F_3(-1)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&1&0&-1&0\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)\underbrace{\sim}_{F_{i4}(-1)\ i=2,3}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&2&-1&-1&-1\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)\sim$$

$$\underbrace{\sim}_{F_{13}(-1)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&0&0&-1&1&1&1\\0&1&0&0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&2&-1&-1&-1\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\sim}_{F_{12}(1)}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&0&1&1&0\\0&1&0&0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&2&-1&-1&-1\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)=\left(I_4\,|\,A^{-1}\right)$$

Ondorioz:

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\1&0&0&-1\\2&-1&-1&-1\\-1&1&0&1\end{pmatrix}}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA - E.U.I.T.I. BILBAO - U.P.V. E.H.U. - BILBOKO I.I.T.U.E. MATEMATIKA APLIKATUAREN SAILA

HOJA 2

A ZATIA [4 puntu]

Izan bitez $\mathcal{P}_3$ espazio bektoriala, eta honako azpiespazioa: $S \triangleq \left\{ p(x)\in\mathcal{P}_3 \,/\, p(1) = p'''(0) = 0 \right\}$.

(1.) S azpiespazio bektoriala definitzen duten ekuazio parametrikoak eman. Lortu oinarri bat, B_S, eta S-ren dimentsioa.

Izan bedi $\forall p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in S$, orduan:

- $p(1) = a + b + c + d = 0$

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA - E.U.I.T.I. BILBAO - U.P.V. E.H.U. - BILBOKO I.I.T.U.E. MATEMATIKA APLIKATUAREN SAILA

- $p'''(0)=6a=0 \Rightarrow a=0$

Hortaz:

$$\boxed{S=\left\{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathcal{P}_3 \;/\; a=0 \wedge b+c+d=0\right\}}$$

$$\boxed{S=\left\{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathcal{P}_3 \;/\; a=0 \wedge b=-c-d\right\}}$$

<u>Oinarriaren lorpena</u>: Bi bektore askeez sortutako sistema sortzaile bat lortzen da, beraz oinarri bat osatzen dute.

$$\forall p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in S \quad p(x)=(-c-d)x^2+cx+d=-c\left(x^2-x\right)-d\left(x^2-1\right)$$

$$\boxed{B_S=\left\{p_2(x)=x^2-x,\; p_3(x)=x^2-1\right\}\Rightarrow \dim S=2}$$

(2.) Osatu S-ren B_S oinarria $\mathcal{P}_3$-ko B' oinarri bat lortu arte.

$\dim(\mathcal{P}_3)=4$ denez, espazio bektorialaren B' oinarri bat lortzeko B_S oinarriari bi polinomio gehitu behar zaizkio. Erarik errazena oinarria oinarri kanonikoko bektoreak erabiliz osatzea da, lortzen den sistema askea dela frogatuz.

Hirugarren berreturak dituzten polinomioak sortu behar direla kontuan izanik, ondorengo polinomioak kontsidera daitezke: $p_1(x)=x^3$ eta $p_4(x)=1$:

$$\sum_{i=0}^{4}\lambda_i\cdot p_i(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\\ -\lambda_2=0\\ \lambda_4-\lambda_3=0\end{cases}$$

$\lambda_i=0 \;\; (i=1,2,3,4)$ betetzen denez, lau bektoreak linealki independenteak dira, eta ondorioz, $\mathcal{P}_3$ espazio bektorialaren oinarri bat sortzen dute:

$$\boxed{B'=\left\{p_1(x)=x^3,\; p_2(x)=x^2-x,\; p_3(x)=x^2-1,\; p_4(x)=1\right\}}$$

B ZATIA [6 puntu]

Izan bitez $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $q(x)=a'x^3+b'x^2+c'x+d'\in\mathcal{P}_3$, eta $\mathcal{P}_3$-ko ohiko biderkadura eskalarra: $\left\langle p(x),q(x)\right\rangle \triangleq aa'+bb'+cc'+dd'$

(3.) Lortu biderkadura eskalarraren Gram matrizea $\mathcal{P}_3$-ren B' oinarriarekiko.

B' oinarriko polinomioen arteko biderkadura eskalar posible guztiak kalkulatuz eta Gram matrizea simetrikoa dela kontuan izanik (biderkadura eskalarra trukakorra delako):

- $\left\langle p_1(x),p_1(x)\right\rangle=1$
- $\left\langle p_1(x),p_2(x)\right\rangle=0$
- $\left\langle p_1(x),p_3(x)\right\rangle=0$
- $\left\langle p_1(x),p_4(x)\right\rangle=0$
- $\left\langle p_2(x),p_2(x)\right\rangle=2$
- $\left\langle p_2(x),p_3(x)\right\rangle=1$
- $\left\langle p_2(x),p_4(x)\right\rangle=0$
- $\left\langle p_3(x),p_3(x)\right\rangle=2$

- $\langle p_3(x), p_4(x)\rangle = -1$
- $\langle p_4(x), p_4(x)\rangle = 1$

$$\boxed{G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(4.) Lortu $r(x) = x^3 + 1$ bektorearen hurbilketarik onena S-n. Egindako errorea adierazi eta lortutako emaitza interpretatu.

Bektore batek azpiespazio batean duen hurbilketarik onena lortzeko, bektore horrek azpiespazioko **oinarri ortogonal** bat sortzen duten bektoreen gainean dituen proiekzio ortogonalen batura kalkulatu behar da.

Lortutako B_S oinarria ez da ortogonala, izan ere: $\langle p_2(x), p_3(x)\rangle = 1 \neq 0 \Rightarrow p_2(x) \not\perp p_3(x)$

Aurretik kalkulatutako B_S oinarria abiapuntu bezala harturik Gram−Schmidt-en metodoa erabiliz S-ren oinarri ortogonal bat lortzen da:

$$B_S = \left\{ p_2(x) = x^2 - x,\ p_3(x) = x^2 - 1 \right\}$$

- $q_1(x) = p_2(x) = x^2 - x$
- $q_2(x) = p_3(x) - \dfrac{\langle p_3(x), q_1(x)\rangle}{\langle q_1(x), q_1(x)\rangle} \cdot q_1(x) = (x^2 - 1) - \dfrac{1}{2}(x^2 - x) = \dfrac{1}{2}(x^2 + x - 2)$

Lortutako bektoreak elkarrekiko ortogonalak dira: $\langle q_1(x), q_2(x)\rangle = 0 \Rightarrow q_1(x) \perp q_2(x)$

Hortaz, S azpiespazioaren **oinarri ortogonal bat** ondokoa da:

$$\boxed{B_O = \left\{ q_1(x) = x^2 - x,\ q_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x - 2) \right\}}$$

$r(x) = x^3 + 1$ polinomioak S-n duen hurbilketarik onenaren lorpena:

$$\boxed{r'(x) = \text{proy}_S\, r(x) = \sum_{i=1}^{2} \text{proy}_{q_i(x)}\, r(x) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle r(x), q_i(x)\rangle}{\langle q_i(x), q_i(x)\rangle} \cdot q_i(x)}$$

- $\text{proy}_{q_1(x)}\, r(x) = \dfrac{\langle r(x), q_1(x)\rangle}{\langle q_1(x), q_1(x)\rangle} \cdot q_1(x) = \dfrac{\langle x^3 + 1, x^2 - x\rangle}{2} \cdot (x^2 - x) = 0$
- $\text{proy}_{q_2(x)}\, r(x) = \dfrac{\langle r(x), q_2(x)\rangle}{\langle q_2(x), q_2(x)\rangle} \cdot q_2(x) = \dfrac{(-1)}{3/2} \cdot \dfrac{1}{2}(x^2 + x - 2) = -\dfrac{1}{3}(x^2 + x - 2)$

$$\boxed{r'(x) = \text{proy}_S\, r(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + x - 2)}$$

$r(x) = x^3 + 1$ S-n hurbiltzean egindako erroaren kalkulua:

- $e(x) = r(x) - r'(x) = (x^3 + 1) + \dfrac{1}{3}(x^2 + x - 2) = x^3 + \dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{3}$

- $\boxed{errorea = \| e(x) \| = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$

Interpretazioa. S azpiespazioko polinomio guztietatik $r'(x)$ polinomioa da $r(x)$ polinomiotik distantzia minimora dagoena, karratu txikien metodoaren zentzuan. Egindako errorearen tamaina $errorea = 1.1547$ izanik.

---

3. ORRIA

A ZATIA [4 puntu]

Izan bedi honako *Mathematica*-ko kodeko lehenengo sarreran definitutako A matrizea:

```
In[1]:= a = {{2, -1, -1}, {-1, 2, -1}, {-1, -1, 2}};

In[2]:= e = Eigensystem[a]
Out[2]= {{3, 3, 0}, {{-1, 0, 1}, {-1, 1, 0}, {1, 1, 1}}}

In[3]:= Orthogonalize[e[[2]]]
Out[3]= {{-1/√2, 0, 1/√2}, {-1/√6, √(2/3), -1/√6}, {1/√3, 1/√3, 1/√3}}
```

Mathematica-ko kodearen analisia.

`In[1]` sarreran $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ matrizea definitzen da: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

A matrizea simetrikoa denez diagonalizagarria da.

`Out[2]` irteeran A matrizearen espektroa agertzen da:

$$\boxed{\sigma(A) = \left\{ \lambda_1 = 3\,(\alpha_1 = 2),\, \lambda_2 = 0\,(\alpha_2 = 1) \right\}}$$

Beraz, `Out[2]` irteeratik $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$ betetzen duen P matrize alderanzgarria existitzen dela ondoriozta daiteke, non:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1.) A matrizea singularra al da? Arrazoitu erantzuna.

$\boxed{M \text{ matrizea singularra} \Leftrightarrow \det(M) = 0}$

`In[2]` sarreran `Out[2]` irteeran agertzen diren A matrizearen balio propioak eta bektore propioak kalkulatzen dira, kasu honetan, balio propioak ondokoak dira:

$$\boxed{\begin{cases} \lambda_1 = 3 & (bikoitza : \alpha_1 = 2) \\ \lambda_2 = 0 & (bakuna : \alpha_2 = 1) \end{cases}}$$

A matrizea D matrize diagonalaren antzekoa denez ($D = P^{-1} \cdot A \cdot P$), ondorengoa ondoriozta daiteke:

$$|D| = |P^{-1} \cdot A \cdot P| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = \frac{1}{|P|} \cdot |A| \cdot |P| = |A|$$

Beraz, balio propio bat nulua denez, A matrizea **singularra** da, izan ere:

$$\boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{2} \lambda_i^{\alpha_i} = 0}$$

$\det(A)$ ere kalkula daiteke:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(2.) Posible bada, A matrizea antzekotasunez diagonalizatu. Arrazoitu erantzuna, erabilitako bektore propioz osatutako oinarria adieraziz.

Mathematica-ko kodea aztertzean azaldutako arrazonamenduagatik A matrizea antzekotasunez diagonalizagarria da:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P matrizearen zutabeek bektore propioz osatutako oinarria sortzen dute, bektore hauek emandako kodeko `Out[2]` irteeran lor daitezke:

$$\boxed{B_\lambda = \{(-1,0,1),(-1,1,0),(1,1,1)\}}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA E.U.I.T.I. BILBAO — U.P.V. E.H.U. — BILBOKO I.I.T.U.E. MATEMATIKA APLIKATUAREN SAILA

B ZATIA [6 puntu]

Izan bitez A eta B matrizeak:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 0 & 1 & 0 \\ 1+m & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1.) Kalkulatu A matrizearen balio propioak eta azpiespazio propioak.

$p(\lambda)$ polinomio karakteristikoaren lorpena:

$$p(\lambda) = |A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-4)^2 (\lambda+1)$$

$$\boxed{p(\lambda)=-(\lambda-4)^2(\lambda+1)}$$

Aurreko pausuan lortutako polinomio karakteristikoa erabiliz eta ekuazio karakteristikoa ebatziz **balio propioak** lortzen dira:

$$p(\lambda)=0 \Rightarrow p(\lambda)=-(\lambda-4)^2(\lambda+1)=0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\lambda_1=-1 & k_1=1\\ \lambda_2=4 & k_2=2\end{cases}}$$

Bektore propioak lortzeko balio propio bakoitzarentzat $\left(A-\lambda_i I_3\right)\vec{x}=[0]_{3\times 3}$ sistema ebazten da:

- $\boxed{\lambda_1=-1}$. Azpiespazio bektoriala: $\boxed{V(-1)=\left\{\vec{x}(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,/\, A\vec{x}=-\vec{x}\right\}\subset\mathbb{R}^3}$

  $\forall\vec{x}(x_1,x_2,x_3)\in V(-1):$

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}4x_1-x_2+x_3=-x_1\\ x_2+3x_3=-x_2\\ 2x_2+2x_3=-x_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\frac{1}{3}x_2\\ x_3=-\frac{2}{3}x_2\end{cases} \quad \forall x_2\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{S(\lambda_1=-1)=V(-1)=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x_1=\tfrac{1}{3}x_2\,,\ x_3=-\tfrac{2}{3}x_2\right\}=\mathcal{L}\left(\left\{\left(\frac{1}{3},1,-\frac{2}{3}\right)\right\}\right)}$$

$$\boxed{B_1=\left\{\vec{v}_1=(1,3,-2)\right\}}$$

- $\boxed{\lambda_2=4}$. Azpiespazio bektoriala: $V(4)=\left\{\vec{x}(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,/\, A\vec{x}=4\vec{x}\right\}\subset\mathbb{R}^3$

  $\forall\vec{x}(x_1,x_2,x_3)\in V(4):$

$$\begin{pmatrix}4 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}4x_1-x_2+x_3=4x_1\\ x_2+3x_3=4x_2\\ 2x_2+2x_3=4x_3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_3=x_2\\ \forall x_1\,,\ x_2\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\boxed{S(\lambda_2=4)=V(4)=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x_3=x_2\right\}=\mathcal{L}\left(\left\{(1,0,0),(0,1,1)\right\}\right)}$$

$$\boxed{B_2=\left\{\vec{v}_2=(1,0,0),\vec{v}_3=(0,1,1)\right\}}$$

Ondorioz, mapa espektrala ondorengoa da:

i	λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$	$d_i=\dim V(\lambda_i)$
1	–1	1	$V(-1)=\mathcal{L}\left(\left\{\vec{v}_1=(1,3,-2)\right\}\right)$	1
2	4	2	$V(4)=\mathcal{L}\left(\left\{\vec{v}_2=(1,0,0),\vec{v}_3=(0,1,1)\right\}\right)$	2

(2.) Posible bada A matrizea diagonalizatu.

A matrizea diagonalizagarria da:

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA E.U.I.T.I. BILBAO U.P.V. E.H.U. BILBOKO I.I.T.U.E. MATEMATIKA APLIKATUAREN SAILA

$$\begin{cases} k_i = d_i = \dim V(\lambda_i) \ \forall i \ (i = 1, 2) \\ \sum_{i=1}^{2} d_i = 3 = maila(A) \end{cases}$$

Beraz, bektore propioz osatutako $\mathbb{E}_3$ espazio bektorialaren oinarri bat daukagu:

$$\boxed{B_\lambda = \{\vec{v}_1 = (1, 3, -2), \vec{v}_2 = (1, 0, 0), \vec{v}_3 = (0, 1, 1)\}}$$

A matrizea antzekotasunez diagonaliza daiteke, P matrizeak aurreko oinarriko bektore propioak zutabeka dituen matrizea izanik:

$$\boxed{D = P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(3.) m-ren zein baliotarako da B matrizea ortogonalki diagonalizagarria? Arrazoitu erantzuna.
B matrizea **erreala** da baina **EZ da simetrikoa**, ondorioz, ez da **inoiz ortogonalki diagonalizagarria** izango;

$$\nexists m \in \mathbb{R} \, / \, \text{B erreala eta simetrikoa}$$

---

4. ORRIA

A ZATIA [4 puntu]

(1.) Izan bedi $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrize erregularra. Frogatu $\vec{x}$ A matrizearen λ balio propioari elkartutako bektore propioa bada, orduan $\vec{x}$ ere $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizearen λ^{-1} balio propioari elkartutako bektore propioa dela.

Beste modu baten esanda:
Jakinda $\vec{x}$ bektorea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizearen λ balio propioari elkartutako bektore propioa dela, hau da, $\boxed{A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}}$ betetzen dela, orduan $\boxed{A^{-1} \cdot \vec{x} = \lambda^{-1} \cdot \vec{x}}$ betetzen dela frogatu behar dugu.

Horretarako, $\boxed{A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}}$ berdintza A^{-1} matrizeagatik ezkerretik biderkatu egingo dugu:

$$A^{-1} \cdot A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot A^{-1} \cdot \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \lambda \cdot A^{-1} \cdot \vec{x}$$

Garatuz: $$\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{x} \Rightarrow \boxed{A^{-1} \cdot \vec{x} = \lambda^{-1} \cdot \vec{x}}$$ (frogatuta geratu da)

(2.) Frogatu $A^{-1} \cdot (B + A) \cdot B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ dela, non $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diren.
Garatuz:

$$A^{-1}\cdot(B+A)\cdot B^{-1}=\left(A^{-1}\cdot B+A^{-1}\cdot A\right)\cdot B^{-1}=\left(A^{-1}\cdot B+I\right)\cdot B^{-1}=A^{-1}\cdot\underbrace{B\cdot B^{-1}}_{I}+I\cdot B^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$$

Ondorioz: $\boxed{A^{-1}\cdot(B+A)\cdot B^{-1}=A^{-1}+B^{-1}}$ (frogatuta geratu da)

B ZATIA [6 puntu]

Izan bedi $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ espazio bektorial euklidearra, ohiko biderkadura eskalarrekin: $\langle A,B\rangle = Aztarna\left(A^T B\right)$. Izan bedi honako azpiespazio hau:

$$S=\left\{A\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})\,/\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot A=A\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

(1.) Lortu S-ren oinarri ortogonal bat, B_{OT}. Azpiespazioaren dimentsioa zehaztu.

<u>*S-ren oinarri baten lorpena*</u>.

$$\forall A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in S:\ \begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-a+c=-a\\-b+d=a+b\\c=-c\\d=d+c\end{cases}$$

$$\forall A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in S:\ \begin{cases}d=a+2b\\c=0\end{cases}$$

Ondorioz:

$$\boxed{S=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})\,/\,d=a+2b\wedge c=0\right\}}$$

$$\boxed{S=\left\{A=\begin{pmatrix}a&b\\0&a+2b\end{pmatrix}/\,a,b\in\mathbb{R}\right\}}$$

S-ko bektore orokor bat azpiespazioko bektoreen konbinazio lineal gisa adieraziz, bi matrize askeez sortutako sistema sortzaile bat lortzen da, beraz eskatutako oinarria lortzen da:

$$\forall A\in S:\ \begin{pmatrix}a&b\\0&a+2b\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{B_S=\left\{A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},A_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\right\}}\Rightarrow\dim S=2$$

Lortutako B_S oinarria ohiko biderkadura eskarra erabiliz ez da ortogonala, izan ere:

$$\langle A_1,A_2\rangle=2\neq0\Rightarrow A_1\not\perp A_2$$

Gram−Schmidt metodoa aplikatuz **oinarri ortogonala** lortzen da:

- $C_1=A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
- $C_2=A_2-\dfrac{\langle A_2,C_1\rangle}{\langle C_1,C_1\rangle}\cdot C_1=\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}-\dfrac{2}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$$\boxed{B_{OT}=\left\{C_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, C_2=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim S=2}$$

2.) Kalkulatu $S^{\perp}$ azpiespazioaren ekuazio parametrikoak.

$S^{\perp}$ azpiespazioan, ohiko biderkadura eskalarra erabiliz, *S*-ko matrizeei ortogonalak diren $\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R})$ espazio bektorialeko matrize guztiak daude, hau da:

$$\boxed{S^{\perp}=\left\{D\in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) / \langle D, A\rangle=0\right\}}$$

Hortaz: $\forall D=\begin{pmatrix}f&g\\h&i\end{pmatrix}\in S^{\perp}: \begin{cases}\langle D, A_1\rangle=0\\ \langle D, A_2\rangle=0\end{cases}$

$$\forall D=\begin{pmatrix}f&g\\h&i\end{pmatrix}\in S^{\perp}: \begin{cases}\left\langle\begin{pmatrix}f&g\\h&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle=0\\ \left\langle\begin{pmatrix}f&g\\h&i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}\right\rangle=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f+i=0\\ g+2i=0\end{cases}$$

$S^{\perp}$ azpiespazioa ekuazioak erabiliz definituz:

$$\boxed{S^{\perp}=\left\{D=\begin{pmatrix}f&g\\h&i\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{R}) / f=-i \wedge g=-2i\right\}}$$

Beste era honetan ere adieraz daiteke: $\boxed{S^{\perp}=\left\{D=\begin{pmatrix}-i&-2i\\h&i\end{pmatrix} / h, i\in \mathbb{R}\right\}}$

(3.) Kalkulatu $C=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}$ matrizearen proiekzioa S azpiespazioaren gainean. Lortutako emaitza interpretatu.

Enuntziatuan zehaztutako matrizea aurreko atal batean kalkulatutako oinarri ortogonala osatzen duen matrize bat da, zehatzak izateko C_2 erabiliz denotatutako matrizea da, hau da:

$$\boxed{C=\begin{pmatrix}-1&1\\0&1\end{pmatrix}=C_2\in B_{OT} \Rightarrow C\in S}$$

Ondorioz, C matrizea S azpiespazioaren barnean dago, hortaz azpiespazioaren gainean duen proiekzioa matrize bera da, hau da:

$$\boxed{C=proy_S\, C}$$
