ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN ARIKETA

euskal herriko unibertsitatea / universidad del país vasco
INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

2013–2014 ikasturtea. Lehen deialdia: 2014ko urtarrilak 10

Abizenak:	
Izena:	**Taldea:**
Ariketa hau egiteko arauak Moodle-en argitaratuta daude, eta ikasleak ezagutu behar ditu	

1. ORRIA

Izan bedi $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, $A^2 - A - I_n = O_n$ ekuazioa egiaztatzen duen matrizea, non I_n eta O_n n ordenako identitate matrizea eta matrize nulua diren, hurrenez hurren.

[A] Frogatu A matrizea erregularra dela eta kalkulatu bere alderantzizkoa. (**2 puntu**)

[B] Aurreko emaitza erabiliz, $A \cdot X \cdot A - I_n = O_n$ ekuazioa ebatzi. (**2 puntu**)

[C] Izan bedi $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ polinomioa. A matrizearen polinomio deuseztatzailea al da? A matrizearen polinomio karakteristikoa izan daiteke? (**puntu 1**)

[D] $\det(A) = \dfrac{1}{2^n}$ dela jakinik, kalkulatu $\det(X)$. (**puntu 1**)

Hurrengo galderen ebazpenerako *Mathematica* programako ondoko kodea ematen da:

```
In[1]:= s = {p1[x_] = x^2 - 2, p2[x_] = x^2 + x + 1, p3[x_] = 3 x^2 + 2 x, p4[x_] = 2 x^2 - x - 7};

In[2]:= m1 = Table[CoefficientList[s[[j]], x], {j, 1, Length[s]}];

In[3]:= m2 = RowReduce[m1]

Out[3]= {{1, 0, -1/2}, {0, 1, 3/2}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}

In[4]:= m3 = Transpose[{m2[[1]], m2[[2]], {c, b, a}}];

In[5]:= Solve[Det[m3] == 0, {c, b, a}]

        Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>

Out[5]= {{a -> 3 b/2 - c/2}}
```

Izan bedi hurrengo polinomioen sistema:

$$S = \{\, p_1(x) = x^2 - 2,\ p_2(x) = x^2 + x + 1,\ p_3(x) = 3x^2 + 2x,\ p_4(x) = 2x^2 - x - 7 \} \subset \mathbb{P}_2(x)$$

[E] Adierazi $V = L(S)$ azpiespazio bektorialaren bi oinarri desberdin, B_1 eta B_2. (**2 puntu**)

[F] Baldin $p(x) \in \mathbb{P}_2(x)$ betetzen bada, $p(x) \in V$ betetzeko baldintza adierazi. (**puntu 1**)

[G] Kalkulatu S-ko polinomioen koefizienteak errenkadaka dituen M matrizearen heina. (**puntu 1**)

2. ORRIA

Izan bedi honako azpimultzoa $S = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(x) \,/\, p(-1) = -p(1) \wedge p(0) = p'(0)\}$

[A] Egiaztatu S $\mathbb{P}_3(x)$-ko azpiespazio bektoriala dela. (**2 puntu**)

[B] Lortu S-ren B_S oinarri bat eta bere dimentsioa adierazi. (**2 puntu**)

[C] Kalkulatu $S \cap T$, non $T = \{\, p(x) \in \mathbb{P}_3(x) \,/\, p'(0) = 0 \} \subset \mathbb{P}_3(x)$ den, oinarri bat lortuz eta bere dimentsioa adieraziz. (**2 puntu**)

[D] Lortu S-ren azpiespazio bektorial ortogonala $\mathbb{P}_3(x)$-ko ohiko biderkadura eskalarra erabiliz, oinarri bat lortuz eta dimentsioa adieraziz. (**3 puntu**)

[E] Lortu B_S oinarria barnean duen $\mathbb{P}_3(x)$ espazio bektorialaren oinarri bat. (**puntu 1**)

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN ARIKETA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

3. ORRIA

Izan bedi hurrengo ezezagunen koefizienteen matrize zabalduak zehazten duen ekuazio linealetako sistema:

$$AM = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+2 & 1 & \alpha \\ 2\alpha & 2(\alpha+1) & \alpha+1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

eta *Mathematica* programako ondorengo kodea:

```
In[1]:= h1 = {1, 0, -1, 0}; h2 = {1, 0, 1, 1}; h3 = {-1, -2, 2, 2}; f = {h1, h2, h3};
In[2]:= MG = Table[f[[i]].f[[j]], {i, 3}, {j, 3}]
Out[2]= {{2, 0, -3}, {0, 3, 3}, {-3, 3, 13}}
In[3]:= FO = Orthogonalize[f]
```

Out[3]= $\left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{22}}, -2\sqrt{\frac{2}{11}}, -\frac{1}{\sqrt{22}}, \sqrt{\frac{2}{11}}\right\}\right\}$

```
In[4]:= v = {-1, -1, -1, -1}; pv = Sum[Projection[v, FO[[i]]], {i, 3}] // FullSimplify
```

Out[4]= $\left\{-\frac{13}{11}, -\frac{8}{11}, -\frac{13}{11}, -\frac{7}{11}\right\}$

```
In[5]:= j = Dot[pv - v, pv - v]
```

Out[5]= $\frac{3}{11}$

```
In[6]:= incognitas = {l, m, n}; sistema = (Transpose[f].incognitas == pv) // FullSimplify;
        Xa = Solve[sistema, {l, m, n}]
```

Out[7]= $\left\{\left\{l \to \frac{6}{11}, m \to -\frac{15}{11}, n \to \frac{4}{11}\right\}\right\}$

[A] Adierazi sistema era bektorialean. (**puntu 1**)

[B] Kalkulatu $|AM|$. (**2 puntu**)

[C] Sailkatu, arrazoituz, emandako sistema $\alpha \in \mathbb{R}$ parametroaren balio desberdinen arabera. (**2 puntu**)

[D] Sistema bateragarria den kasuetan ebatzi Gauss-Jordan metodoa erabiliz. (**2.5 puntu**)

[E] $\alpha = -1$ kasurako sistema era hurbilduan ebatzi, Karratu Txikien Metodoa eta ariketa honetarako egokia den espazio bektorialeko ohiko biderkadura eskalarra erabiliz. Egindako errorea kalkulatu eta lortutako emaitza interpretatu. (**2.5 puntu**)

4. ORRIA

Izan bedi hurrengo matrize erreala: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 2 & \gamma & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

[A] Lortu A matrizearen balio propioak. (**puntu 1**)

[B] A matrizea diagonalizagarria al da $\gamma = 0$ denean? Erantzuna justifikatu, eta erantzuna baiezkoa bada, P matrizea lortu. (**4 puntu**)

[C] Kalkulatu $|A|$ eragiketarik egin gabe. Cayley–Hamilton-en teorema aplikatuz $\gamma = -1$ kasurako A^{-1} matrizea kalkulatu. (**3 puntu**)

[D] $\gamma = -1$ kasurako $|A^{-4}|$-ren balioa zehaztu. (**2 puntu**)

Noten argitalpena: 2014ko urtarrilaren 17an, 17:00etan
Ariketen berrikuspena: 2014ko urtarrilaren 20an, 10:30etan
(7I1 Matematika Aplikatuko Laborategia)