ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

2013–2014 ikasturtea. Lehen deialdia: 2014ko urtarrilak 10

1. ORRIA

Izan bedi $A \in \mathbb{M}_{nxn}(\mathbb{R})$ $A^2 - A - I_n = O_n$ ekuazioa egiaztatzen duen matrizea, non I_n eta O_n n ordenako identitate matrizea eta matrize nulua diren, hurrenez hurren.

[A] Frogatu A matrizea erregularra dela eta kalkulatu bere alderantzizkoa. (**2 puntu**)

Enuntziatuan emandako ekuazioan eragiketak eginez:

- $A^2 - A - I_n = O_n \Rightarrow (A - I_n)A = I_n$
- $A^2 - A - I_n = O_n \Rightarrow A(A - I_n) = I_n$

Beraz, A matrizea **erregularra** da, definizioak esaten duen bezalaxe, A matrizeari ezkerraldean edota eskuinaldean biderkatuz identitate matrizea ematen duen matrize karratua existitzen baita.

Bestalde, A matrizearen **alderantzizko matrizea** propietate hori betetzen duen matrizea da, kasu honetan:

$$\boxed{A^{-1} = A - I_n}$$

[B] Aurreko emaitza erabiliz, $A \cdot X \cdot A - I_n = O_n$ ekuazioa ebatzi. (**2 puntu**)

Emandako ekuazioan eragiketak eginez: $A \cdot X \cdot A - I_n = O_n \Rightarrow A \cdot X \cdot A = I_n$

Berdintzako alde bietan A matrizearen alderantzizkoa eskuinaldean biderkatuz:

$$A \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = I_n \cdot A^{-1} \Rightarrow A \cdot X = A^{-1}$$

A^{-1} matrizea ezkerraldean biderkatuz, berriz:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow X = \left(A^{-1}\right)^2$$

Eragiketak burutuz: $X = \left(A^{-1}\right)^2 = (A - I_n)^2 = A^2 - 2A + I_n$

Bestalde $A^2 - A = I_n$ egiaztatzen denez, ondorengoa dugu: $\boxed{X = 2I_n - A}$

Beste era batera: $A \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = I_n \cdot A^{-1} \Rightarrow A \cdot X = A^{-1} = A - I_n$

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A - I_n) = I_n - A^{-1} = I_n - (A - I_n) = 2I_n - A$$

[C] Izan bedi $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ polinomioa. A matrizearen polinomio deuseztatzailea al da? A matrizearen polinomio karakteristikoa izan daiteke? (**puntu 1**)

Bai, A matrizearen polinomio deuseztatzailea da, $p(A) = A^2 - A - I_n = O_n$ betetzen baita.

Matrize baten polinomio karakteristikoa matrizearen polinomio deuseztatzailea denez, $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$ A matrizearen polinomio karakteristikoa izan daiteke n=2 denean, hau da, $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ betetzen denean.

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN ARIKETA

EBAZPENA

[D] $\det(A)=\dfrac{1}{2^n}$ dela jakinik, kalkulatu $\det(X)$. (**puntu 1**)

Determinanteen propietateak aplikatuz: $A\cdot X\cdot A=I_n \Rightarrow |A\cdot X\cdot A|=|I_n|=1$

Eragiketak eginez: $|A\cdot X\cdot A|=|A|\cdot|X|\cdot|A|=1\Rightarrow |X|=\dfrac{1}{|A|^2}=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2^n}\right)^2}$

Ondorioz: $\boxed{|X|=2^{2n}=4^n}$

Hurrengo galderen ebazpenerako *Mathematica* programako ondoko kodea ematen da:

```
In[1]:= s = {p1[x_] = x^2 - 2, p2[x_] = x^2 + x + 1, p3[x_] = 3 x^2 + 2 x, p4[x_] = 2 x^2 - x - 7};
In[2]:= m1 = Table[CoefficientList[s[[j]], x], {j, 1, Length[s]}];
In[3]:= m2 = RowReduce[m1]
Out[3]= {{1, 0, -1/2}, {0, 1, 3/2}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
In[4]:= m3 = Transpose[{m2[[1]], m2[[2]], {c, b, a}}];
In[5]:= Solve[Det[m3] == 0, {c, b, a}]
        Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. >>
Out[5]= {{a -> 3b/2 - c/2}}
```

Izan bedi hurrengo polinomioen sistema:

$$S=\{\,p_1(x)=x^2-2,\ p_2(x)=x^2+x+1,\ p_3(x)=3x^2+2x,\ p_4(x)=2x^2-x-7\}\subset \mathbb{P}_2(x)$$

[E] Adierazi $V=L(S)$ azpiespazio bektorialaren bi oinarri desberdin, B_1 eta B_2.

(**2 puntu**)

Mathematica programako komandoa erabiliz hurrengo dugu:

- `m1` aldagaia matrize bat da, S sistemako polinomioen koefizienteak errenkadaka dituen matrizea, hain zuzen.
- `m2` aldagaiak errenkadaka `m1` matrizearen baliokidea den matrize bat adierazten du, non $h(m2)=2=h(m1)$ betetzen den.

V-ren oinarriak hurrengo bektoreak osatzen dituztela ondoriozta daiteke:

- *S*-ko bi bektore aske aukeratuz: $\boxed{B_1=\{x^2-2,\,x^2+x+1\}}$
- `m2` matrizeko bi errenkada ez-nulu aukeratuz: $\boxed{B_2=\left\{-\dfrac{1}{2}x^2+1,\,\dfrac{3}{2}x^2+x\right\}}$

ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

Ariketa *Mathematica* programako komandoa erabili gabe ebatziz:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\1&1&1\\3&2&0\\2&-1&-7\end{pmatrix}\underset{\substack{E_2-E_1\\E_3-3E_1\\E_4-2E_1}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\0&2&6\\0&-1&-3\end{pmatrix}\underset{\substack{E_3-2E_2\\E_4+E_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=B$$

Ondorioz: $A\sim B\Rightarrow rg(A)=rg(B)=2$.

V-ren oinarriak hurrengo bektoreak osatzen dituztela ondoriozta daiteke:

- S-ko bi bektore aske aukeratuz: $\boxed{B_1=\{x^2-2,\,x^2+x+1\}}$
- B matrizeko bi errenkada ez-nulu aukeratuz: $\boxed{B_2=\{x^2-2,\,x+3\}}$

[F] Baldin $p(x)\in\mathbb{P}_2(x)$ betetzen bada, $p(x)\in V$ betetzeko baldintza adierazi.(**puntu 1**)

Izan bedi $p(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{P}_2(x)$ polinomioa. $p(x)\in V$ betetzeko, $p(x)$ polinomioa V azpiespazioaren oinarriko bektoreen konbinazio lineal gisa idaztea posible izan behar da.

$p(x)\in V$ bektore orokorraren eta V-ko oinarri bat, B_2 oinarria adibidez, osatzen duten polinomioen koefizienteak matrize baten zutabeka jarriz ondorengoa daukagu:

$$rg\begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&b\\-2&3&c\end{pmatrix}=2\quad\Rightarrow\quad\begin{vmatrix}1&0&a\\0&1&b\\-2&3&c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&3&c+2a\end{vmatrix}=c+2a-3b=0$$

Beraz: $\boxed{V=\{\,p(x)=ax^2+bx+c\in P_2(x)\ \ /\ c=3b-2a\,\}}$

Edota: $\boxed{V=\{\,p(x)=ax^2+bx+3b-2a\in P_2(x)\ \ /\ a,b\in\mathbb{R}\,\}}$

Beste era batera: $p(x)=ax^2+bx+c=\alpha(x^2-2)+\beta(x+3)\Rightarrow\begin{cases}a=\alpha\\b=\beta\\c=3\beta-2\alpha\end{cases}$

$$\boxed{V=\{\,p(x)=ax^2+bx+c\in P_2(x)\ \ /\ c=3b-2a\,\}}$$

[G] Kalkulatu S-ko polinomioen koefizienteak errenkadaka dituen M matrizearen heina. (**puntu 1**)

Mathematica programako komandoan matrize hau `m1` matrizea da, beraz:

$$\boxed{m1\sim m2\Rightarrow rg(m1)=rg(m2)=2}$$

Halaber: $\boxed{A\sim B\Rightarrow rg(A)=rg(B)=2}$

euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco
INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

2. ORRIA

Izan bedi honako azpimultzoa $S = \{p(x) \in \mathbb{P}_3(x) \,/\, p(-1) = -p(1) \wedge p(0) = p'(0)\}$

[A] Egiaztatu S $\mathbb{P}_3$(x)-ko azpiespazio bektoriala dela. (**2 puntu**)

S azpiespazio bektoriala dela egiaztatzeko frogatu beharreko baldintza ondokoa da:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ \forall p(x), q(x) \in S \Rightarrow h(x) = \alpha p(x) + \beta q(x) \in S$$

- $h(-1) = \alpha p(-1) + \beta q(-1) \overset{\substack{p(x)\in S \\ q(x)\in S}}{=} -\alpha p(1) - \beta q(1) = -(\alpha p(1) + \beta q(1)) = -h(1) \Rightarrow$
  $\Rightarrow h(-1) = -h(1)$
- $h(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) \overset{\substack{p(x)\in S \\ q(x)\in S}}{=} \alpha p'(0) + \beta q'(0) = h'(0) \Rightarrow h(0) = h'(0)$

Beraz, $h(x) = \alpha p(x) + \beta q(x) \in S$, hau da, S $\mathbb{P}_3$(x)-ren azpiespazio bektoriala da.

[B] Lortu S-ren B_S oinarri bat eta bere dimentsioa adierazi. (**2 puntu**)

$$\forall p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \in \mathbb{P}_3(x) \Rightarrow p'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$$

- $p(-1) = -p(1) \Rightarrow -a + b - c + d = -a - b - c - d \Rightarrow 2b + 2d = 0 \Rightarrow b = -d$
- $p(0) = p'(0) \Rightarrow d = c$

Hortaz, S azpiespazio bektorialeko edozein polinomiok hurrengo itxura du:

$$p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = a \cdot x^3 - d \cdot x^2 + d \cdot x + d = a \cdot x^3 + d(-x^2 + x + 1) \Rightarrow$$
$$S = \mathcal{L}\left(\left\{x^3, -x^2 + x + 1\right\}\right)$$

Bestalde, aurreko sistema sortzen duten bi polinomioak linealki independenteak direnez:

$$h\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \boxed{B_S = \left\{x^3, -x^2 + x + 1\right\}} \text{ eta } \dim S = 2$$

[C] Kalkulatu $S \cap T$, non $T = \{ p(x) \in \mathbb{P}_3(x) \,/\, p'(0) = 0\} \subset \mathbb{P}_3(x)$ den, oinarri bat lortuz eta bere dimentsioa adieraziz. (**2 puntu**)

$$\forall p(x) \in S \cap T \Rightarrow p(x) \in S \wedge p(x) \in T$$

Aurreko ataletik S-ko polinomioen koefizienteek betetzen dituzten baldintzak ezagutzen ditugu. Azter dezagun orain T-ko polinomioen koefizienteek bete behar dituzten baldintzak zeintzuk diren:

- $p(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d; \quad p'(x) = 3a\cdot x^2 + 2b\cdot x + c$
- $p(x) \in T \Rightarrow p'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Ondorioz:

$$\left.\begin{array}{l} p(x)\in S \Rightarrow \mathrm{p(-1) = -p(1)} \wedge \mathrm{p(0) = p'(0)} \Rightarrow b = -d \wedge d = c \\ p(x)\in T \Rightarrow p'(0) = 0 \Rightarrow c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{array}\right\}$$

$$p(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d = a\cdot x^3$$

Hau da:

$$S \cap T = \{p(x)\in \mathbb{P}_3(\mathrm{x}) \,/\, b = -d \wedge c = d \wedge c = 0\} = \{p(x)\in \mathbb{P}_3(\mathrm{x}) \,/\, b = c = d = 0\}$$

$$\boxed{S \cap T = \mathcal{L}\left(\{x^3\}\right) \Rightarrow B_{S\cap T} = \{x^3\}}$$

[D] Lortu *S*-ren azpiespazio bektorial ortogonala $\mathbb{P}_3(\mathrm{x})$-ko ohiko biderkadura eskalarra erabiliz, oinarri bat lortuz eta dimentsioa adieraziz. (**3 puntu**)

S-ren azpiespazio bektorial ortogonala ondokoa da:

$$S^\perp = \{p(x)\in \mathbb{P}_3(\mathrm{x}) \,/\, p(x)\perp B_S\} = \left\{p(x)\in \mathbb{P}_3(\mathrm{x}) \,/\, p(x)\perp x^3 \wedge p(x)\perp\left(-x^2 + x + 1\right)\right\}$$

$$p(x)\in \mathbb{P}_3(\mathrm{x}) \Rightarrow p(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d$$

Biderkadura eskalarrak garatuz:

- $p(x)\perp x^3 \Rightarrow \left\langle p(x), x^3\right\rangle = 0 \Rightarrow \left\langle a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d, x^3\right\rangle = a = 0$
- $p(x)\perp -x^2 + x + 1 \Rightarrow \left\langle p(x), -x^2 + x + 1\right\rangle = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\langle a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d\,,\, -x^2 + x + 1\right\rangle = -b + c + d = 0$$

Ondorioz, ondokoa ondoriozta daiteke:

$$\forall p(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d \in S^\perp: \quad \left.\begin{array}{l} a = 0 \\ d = b - c \end{array}\right\}$$

Beraz,

$$p(x) = a\cdot x^3 + b\cdot x^2 + c\cdot x + d = b\cdot x^2 + c\cdot x + (b - c) = b\cdot(x^2 + 1) + c\cdot(x - 1)$$

Hau da: $\boxed{S^\perp = \mathcal{L}\left(\{x^2 + 1, x - 1\}\right)}$

Hortaz gain, sistema sortzailea osatzen duten bi polinomioak linealki independenteak direnez:

$$h\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \boxed{B_{S^\perp} = \{x^2+1, x-1\}}$$

[E] Lortu B_S oinarria barnean duen $\mathbb{P}_3(x)$ espazio bektorialaren oinarri bat. (**puntu 1**)

S azpiespazio bektoriala eta bere azpiespazio ortogonala $\left(S^\perp\right)$ osagarriak dira, hau da, $S \oplus S^\perp \cong \mathbb{P}_3(x)$. Beraz, $\mathbb{P}_3(x)$-ko oinarri bat sortzeko bi azpiespazio bektorialen oinarriak elkar daitezke:

$$\boxed{B_{\mathbb{P}_3(x)} = \{x^3, -x^2+x+1, x^2+1, x-1\}}$$

---

3. ORRIA

Izan bedi hurrengo ezezagunen koefizienteen matrize zabalduak zehazten duen ekuazio linealetako sistema:

$$AM = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+2 & 1 & \alpha \\ 2\alpha & 2(\alpha+1) & \alpha+1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 & \alpha \\ 2 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

eta *Mathematica* programako ondorengo kodea:

```
In[1]:= h1 = {1, 0, -1, 0}; h2 = {1, 0, 1, 1}; h3 = {-1, -2, 2, 2}; f = {h1, h2, h3};
In[2]:= MG = Table[f[[i]].f[[j]], {i, 3}, {j, 3}]
Out[2]= {{2, 0, -3}, {0, 3, 3}, {-3, 3, 13}}
In[3]:= FO = Orthogonalize[f]
```

$$\text{Out[3]=} \left\{\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{-\frac{1}{\sqrt{22}}, -2\sqrt{\frac{2}{11}}, -\frac{1}{\sqrt{22}}, \sqrt{\frac{2}{11}}\right\}\right\}$$

```
In[4]:= v = {-1, -1, -1, -1}; pv = Sum[Projection[v, FO[[i]]], {i, 3}] // FullSimplify
```

$$\text{Out[4]=} \left\{-\frac{13}{11}, -\frac{8}{11}, -\frac{13}{11}, -\frac{7}{11}\right\}$$

```
In[5]:= j = Dot[pv - v, pv - v]
```

$$\text{Out[5]=} \frac{3}{11}$$

```
In[6]:= incognitas = {l, m, n}; sistema = (Transpose[f].incognitas == pv) // FullSimplify;
        Xa = Solve[sistema, {l, m, n}]
```

$$\text{Out[7]=} \left\{\left\{l \to \frac{6}{11}, m \to -\frac{15}{11}, n \to \frac{4}{11}\right\}\right\}$$

[A] Adierazi sistema era bektorialean. (**puntu 1**)

$$\sum_{i=1}^{3}\vec{a}_i x_i=\vec{b} \quad / \quad \begin{aligned}\vec{a}_1&=(\alpha,2\alpha,2,2)\in\mathbb{R}^4\\ \vec{a}_2&=(\alpha+2,2(\alpha+1),\alpha,0)\in\mathbb{R}^4\\ \vec{a}_3&=(1,\alpha+1,1,1)\in\mathbb{R}^4\\ \vec{b}&=(\alpha,\alpha,\alpha,\alpha)\in\mathbb{R}^4\end{aligned}$$

[B] Kalkulatu $|AM|$. (**2 puntu**)

$$|AM|=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha+2 & 1 & \alpha\\ 2\alpha & 2(\alpha+1) & \alpha+1 & \alpha\\ 2 & \alpha & 1 & \alpha\\ 2 & 0 & 1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix}\alpha & \alpha+2 & 1 & 1\\ 2\alpha & 2(\alpha+1) & \alpha+1 & 1\\ 2 & \alpha & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}\underset{E_i\leftarrow E_i-E_1,\, i=[2,4]}{=}\alpha\begin{vmatrix}\alpha & \alpha+2 & 1 & \boxed{1}\\ \alpha & \alpha & \alpha & 0\\ 2-\alpha & -2 & 0 & 0\\ 2-\alpha & -\alpha-2 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-\alpha\begin{vmatrix}\alpha & \alpha & \alpha\\ 2-\alpha & -2 & 0\\ 2-\alpha & -2-\alpha & 0\end{vmatrix}=-\alpha^2(2-\alpha)\begin{vmatrix}1 & 1 & \boxed{1}\\ 1 & -2 & 0\\ 1 & -2-\alpha & 0\end{vmatrix}=-\alpha^2(2-\alpha)\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -2-\alpha\end{vmatrix}=$$

$$=\alpha^2(\alpha-2)(-\alpha-2+2)=-\alpha^3(\alpha-2)$$

[C] Sailkatu, arrazoituz, emandako sistema $\alpha\in\mathbb{R}$ parametroaren balio desberdinen arabera. (**2 puntu**)

Rouché-Frobenious-en teorema erabiliz ekuazio linealetako sistemaren sailkapena heinen azterketan bilakatzen da. Kasu honetan, AM matrizea karratua denez komenigarriena $|AM|=-\alpha^3(\alpha-2)$ determinantea kalkulatuz hastea da, ondoren, determinante hau abiapuntu bezala harturik aztertu beharreko kasuak garatuz. Aztertu beharreko kasuak ondokoak dira:

- **1 KASUA** $(\forall\alpha\in\mathbb{R}-\{0,2\})$. Nabaria da $|AM|\neq 0 \;\Rightarrow\; h(AM)=4>h(A)$; kasu honetan **sistema bateraezina** da.

- **2 KASUA:** $(\alpha=0)$. Kasu honetan:

$$AM\big|_{\alpha=0}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & 0\\ \boxed{0 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 0}\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ \boxed{2 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0}\end{pmatrix}\Rightarrow h(AM)=h(B)=2<n=3\Rightarrow$$

Sistema homogeneoa denez **bateragarri indeterminatua** da.

- **<u>3 KASUA:</u>** $(\alpha = 2)$. Kasu honetako matrizeak aztertuz:

$$AM\big|_{\alpha=2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \text{ non } |A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{Z_1 \leftarrow Z_1 - 2Z_3}{=} \begin{vmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{\text{matrize goi-triangeluarra}}{=} -4 \neq 0$$

Beraz, $h(AM) = 3 = h(A) = n$, ondorioz, **sistema bateragarri determinatua** da.

[D] Sistema bateragarria den kasuetan ebatzi Gauss-Jordan metodoa erabiliz. (**2.5 puntu**)

- **2 KASUA** $(\alpha = 0)$. Kasu honetan:

$$AM\big|_{\alpha=0} = \left(\begin{array}{cccc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -z \\ 2 & 0 & -z \end{array}\right) \underset{E_i \leftarrow \frac{1}{2}E_i,\ i=1,2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -z/2 \\ 1 & 0 & -z/2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = \dfrac{-z}{2} \\ y = \dfrac{-z}{2} \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}}$$

- **3 KASUA** $(\alpha = 2)$. Kasu honetako matrizeak aztertuz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{E_1 \leftarrow \frac{1}{2}E_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - 4E_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{E_2 \leftarrow \frac{-1}{2}E_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{E_3 \leftarrow E_3 - 6E_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{E_1 \leftarrow E_1 - \frac{1}{2}E_3}{\sim} \left(\begin{array}{c|c} & 2 \\ I_3 & 0 \\ & -2 \end{array}\right) \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -z = 2 \\ y = 0 \end{cases}}$$

[E] $\alpha = -1$ kasurako sistema era hurbilduan ebatzi, Karratu Txikien Metodoa eta ariketa honetarako egokia den espazio bektorialeko ohiko biderkadura eskalarra erabiliz. Egindako errorea kalkulatu eta lortutako emaitza interpretatu. (**2.5 puntu**)

$\alpha = -1$ denez sistema bateraezina da. Hau da, $\bar{b} = (-1, -1, -1, -1) \notin \mathcal{L}(F)$, F hurrengo bektore sistema izanik $F \triangleq \{\bar{a}'_1 = (-1,-2,2,2), \bar{a}'_2 = (1,0,-1,0), \bar{a}'_3 = (1,0,1,1)\}$. Hortaz, sistema era hurbilduan karratu txikien metodoa aplikatuz ebatziko da:

- **1. Urratsa.**

Independentzia linealaren teoremaren arabera: $r(F) = r(M) = 3$, izan ere:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \text{eta} \quad |M_1| = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-1} & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Ondorioz, F sistema askea da. Ariketa honetan $\mathbb{R}^4$ espazio bektorial euklidearrean lanean ari gara, $\mathbb{R}^4$-ko ohiko biderkadura eskalarra hurrengo eran definitzen da:

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i \,/\, \bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

Biderkadura eskalar hau erabiliz F sistema ez da sistema ortogonala.

Izan ere, **Out[2]**-an ikus daiteken bezalaxe biderkadura eskalarrari elkartutako Gram-en matrizea diagonala ez baita. (**MG aldagaian** Gram-en matrizea kalkulatzen da.)

- **2. Urratsa.**

(a) Gram–Schmidt-en metodoa aplikatuz, F sistema askea abiapuntu bezala harturik bektore sistema ortogonal bat eraikitzen da:

$$B_{ORTOG} = \{\bar{v}_i\}_{1 \le i \le 3} \,/\, \mathcal{L}(B_{ORTOG}) = \mathcal{L}(B)$$

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = \bar{u}_1 = \ldots ; \|\bar{v}_1\|^2 = \ldots \\ \bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \dfrac{\langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = \ldots ; \|\bar{v}_2\|^2 = \ldots \\ \bar{v}_3 = \bar{u}_1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{2} \dfrac{\cancel{\langle \bar{u}_1, \bar{v}_i \rangle}}{\|\bar{v}_i\|^2} \bar{v}_i = \ldots ; \|\bar{v}_3\|^2 = \ldots \end{cases}$$

$\{\bar{u}_i\}$ bektoreak F sistemako bektoreen edozein permutazio posible izanik. Bektore hauen permutazio posible bat *Mathematica* programako kodean **In[1]** sarreran agertzen da ({h1, h2, h3} bektoreak ikusi).

(b) Azkenik, B_{ORTOG} sistema ortonormalizatzen da:

$$B_{ORTON} = \left\{ \bar{w}_i = \frac{\bar{v}_i}{\|\bar{v}_i\|} \right\}_{1 \le i \le 3} \,/\, \mathcal{L}(B_{ORTON}) = \mathcal{L}(B_{ORTOG}) = \mathcal{L}(B)$$

Mathematica programako Orthogonalize **[ ]** funtzioak sistema hau ematen du. Prozesu hau **In[1]** eta **In[3]** sarreretan egiten da, emaitza **Out[3]** irteeran lortuz. (**FO aldagaia** ikusi)

- **3. Urratsa**.

  $\bar{b} \in \mathbb{R}^4$ bektorea $\mathcal{L}(F)$ azpiespazio bektorialaren gainean ortogonalki proiektatzen da, proiekzio hau bakarra izanik:

  $$\bar{b}_p = proy_S\,\bar{b} = proy_{\mathcal{L}(B_{ORTOG})}\,\bar{b} = proy_{\mathcal{L}(B_{ORTON})}\,\bar{b}$$

  Hurrengo Fourier-en baturaren bidez kalkulatzen da:

  $$\bar{b}_p = \sum_{i=1}^{3} \frac{\langle \bar{b}, \bar{v}_i \rangle}{\|\bar{v}_i\|^2}\bar{v}_i = \sum_{i=1}^{3} \langle \bar{b}, \bar{w}_i \rangle \bar{w}_i = \left(-\frac{13}{11}, -\frac{8}{11}, -\frac{13}{11}, -\frac{7}{11} \right)$$

  Proiekzio ortogonala *Mathematica* programako komandoko **In[4]** + **Out[4]** sarreran eta irteeran kalkulatzen da (**pv aldagaia** ikusi).

- **4. Urratsa**.

  Hasierako ekuazio linealetako sisteman $\bar{b} \notin \mathcal{L}(F)$ gai askearen ordez $\bar{b}_p \in \mathcal{L}(F)$ gai askea jartzen da. Ordezkapen honek sistema bateragarria bilakatzen du, hau da:

  $$\sum_{i=1}^{3} \bar{a}'_i x_i = \bar{b}_p$$

- **5. Urratsa**.

  Aurreko sistema ebatziz bilatzen ari garen soluzio hurbildua lortzen dugu. Soluzio hau *Mathematica* programako komandoko **In[6]** + **Out[6]** sarreran eta irteeran kalkulatzen da, **Xa aldagaian.**

  $$\bar{x}_{aprox} = \left(x_1 = \frac{6}{11}, x_2 = -\frac{15}{11}, x_3 = \frac{4}{11} \right)$$

  Aljebraikoki soluzioa hurrengo adierazpenak zehazten du:

  $$\bar{x}_{aprox} = \left(A^T A\right)^{-1}\left(A^T b\right)$$

- **6. Urratsa**.

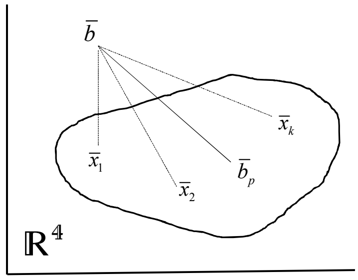
  Geometrikoki ondokoa egiten ari gara:

  $$\bar{b}_p = \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} proy_{\bar{u}_i}\bar{b} = proy_{\bar{u}_1}\bar{b} + proy_{\bar{u}_2}\bar{b} + proy_{\bar{u}_3}\bar{b} \\ \sum_{i=1}^{3} proy_{\bar{w}_i}\bar{b} = proy_{\bar{w}_1}\bar{b} + proy_{\bar{w}_2}\bar{b} + proy_{\bar{w}_3}\bar{b} \end{cases}$$

  Prozesu hau hurrengoaren baliokidea da:

  $$\bar{b}_p \in S = \mathcal{L}(F) \subseteq \mathbb{R}^4 \,/\, \min_{\forall \bar{x} \in S} d\left(\bar{b}, x\right) = \min_{\forall \bar{x} \in S} \left\| \bar{b} - \bar{x} \right\|$$

Grafikoki ondokoa dugu:



- **7. Urratsa:**

  Hurbilketan egindako errorea hurrengoa da:

$$\left\| \overline{b} - \overline{b}_p \right\| = \sqrt{\left\langle \overline{b} - \overline{b}_p , \overline{b} - \overline{b}_p \right\rangle} = \sqrt{\frac{3}{11}} = 0.5222 \; unitate$$

  Errorea *Mathematica* programako komandoko **In[5]** + **Out[5]** sarreran eta irteeran kalkulatzen da, **j aldagaian.**

---

4. ORRIA

Izan bedi hurrengo matrize erreala: $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 2 & \gamma & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

[A] Lortu A matrizearen balio propioak. (**puntu 1**)

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 & 5 \\ 2 & \gamma-\lambda & 2 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\gamma-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -3-\lambda & 5 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\gamma-\lambda) \cdot \left[(-3-\lambda) \cdot (4-\lambda) + 2 \cdot 5 \right] =$$

$$= (\gamma-\lambda) \cdot \left(-12 + 3\lambda - 4\lambda + \lambda^2 + 10 \right) = (\gamma-\lambda) \cdot \left(\lambda^2 - \lambda - 2 \right) = (\gamma-\lambda) \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda-2)$$

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow p(\lambda) = (\gamma-\lambda) \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \gamma \rightarrow k_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \rightarrow k_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \rightarrow k_3 = 1 \end{cases}$$

[B] A matrizea diagonalizagarria al da $\gamma = 0$ denean? Erantzuna justifikatu, eta erantzuna baiezkoa bada, P matrizea lortu. (**4 puntu**)

Kasu honetan, A matrizeak hiru balio propio desberdin ditu, hortaz, A matrizea **diagonalizagarria** da.

$$\boxed{\left. \begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \rightarrow k_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \rightarrow k_2 = 1 \\ \lambda_3 = 2 \rightarrow k_3 = 1 \end{array} \right\}}$$

Bektore propioak lortzeko $(A-\lambda_i\cdot I_3)\cdot\vec{x}=\vec{0}$ sistema balio propio bakoitzerako kalkulatzen da.

- $\boxed{\lambda_1=0}$. Azpiespazio bektoriala: $V(0)=\left\{\vec{x}(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / A\vec{x}=[0]_{3\times 3}\right\}\subset\mathbb{R}^3$

$$\forall\vec{x}(x,y,z)\in V(0):\quad \begin{pmatrix}-3&0&5\\2&0&2\\-2&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-3x+5z=0\\2x+2z=0\\-2x+4z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=z=0\\\forall y\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\boxed{V(\lambda_1=0)=\left\{\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=0\wedge z=0\right\}=\mathcal{L}(\{(0,1,0)\})}$$

- $\boxed{\lambda_2=-1}$. Azpiespazio bektoriala: $V(-1)=\left\{\vec{x}(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A+I_3)\vec{x}=[0]_{3\times 3}\right\}$

$$\forall\vec{x}(x,y,z)\in V(-1):\quad \begin{pmatrix}-2&0&5\\2&1&2\\-2&0&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2x+5z=0\\2x+y+2z=0\\-2x+5z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=-\dfrac{y}{7}\\x=-\dfrac{5y}{14}\end{cases}$$

$$\boxed{V(\lambda_2=-1)=\left\{\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=\frac{-5}{14}y\wedge z=\frac{-1}{7}y\right\}=\mathcal{L}(\{(-5,14,-2)\})}$$

- $\boxed{\lambda_3=2}$. Azpiespazio bektoriala: $V(2)=\left\{\vec{x}(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / (A-2I_3)\vec{x}=[0]_{3\times 3}\right\}$

$$\forall\vec{x}(x,y,z)\in V(2):\quad \begin{pmatrix}-5&0&5\\2&-2&2\\-2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-5x+5z=0\\2x-2y+2z=0\\-2x+2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=x\\x=\dfrac{y}{2}\end{cases}$$

$$\boxed{V(\lambda_3=2)=\left\{\vec{x}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=\frac{y}{2}y\wedge z=\frac{y}{2}\right\}=\mathcal{L}(\{(1,2,1)\})}$$

Beraz, mapa espektrala ondokoa da:

i	λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$	$d_i=\dim V(\lambda_i)$
1	0	1	$V(\lambda_1=0)=\mathcal{L}(\{(0,1,0)\})$	1
2	-1	1	$V(\lambda_2=-1)=\mathcal{L}(\{(-5,14,-2)\})$	1
3	2	1	$V(\lambda_3=2)=\mathcal{L}(\{(1,2,1)\})$	1

A matrizea antzekotasunez diagonalizagarria da. Hau da,

$\exists P\in\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) / D=P^{-1}AP$ $\quad D$ matrizea diagonala izanik. A matrizearen diagonalizazio posible bat ondorengoa da:

ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}0 & -5 & 1\\ 1 & 14 & 2\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}$$

non $B=\{\overline{u}_1=(0,1,0), \overline{u}_2=(-5,14,-2), \overline{u}_3=(1,2,1)\}\subset\mathbb{R}^3$ bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat den.

[C] Kalkulatu $|A|$ eragiketarik egin gabe. Cayley–Hamilton-en teorema aplikatuz $\gamma=-1$ kasurako A^{-1} matrizea kalkulatu. (**3 puntu**)

Balio propioak erabiliz: $|A|=\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3=\gamma\cdot(-1)\cdot(2)=-2\gamma$

Beste era batera: Polinomio karakteristikoa erabiliz: $|A|=p(0)=-2\gamma$

Caley-Hamilton-en teorema aplikatuz:

$$p(\lambda)=(-1-\lambda)\cdot(\lambda+1)\cdot(\lambda-2)=(-1-\lambda)\cdot(\lambda^2-\lambda-2)=2+3\lambda-\lambda^3$$

$$p(A)=2I+3A-A^3=0$$

$$3A-A^3=-2I$$

$$A\cdot(3I-A^2)=-2I$$

$$A\cdot\underbrace{\left(-\frac{3I-A^2}{2}\right)}_{A^{-1}}=I$$

$$A^{-1}=-\frac{3I-A^2}{2}=\begin{pmatrix}-2 & 0 & \frac{5}{2}\\ -6 & -1 & 8\\ -1 & 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

[D] $\gamma=-1$ kasurako $|A^{-4}|$-ren balioa zehaztu. (**2 puntu**)

$$\boxed{|A^{-4}|=|A|^{-4}=(\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3)^{-4}=(2)^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}}$$