ÁLGEBRA LINEAL – Primer Parcial (17 de Enero de 2014)

1.- Dadas las afirmaciones siguientes indicar si son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas dando un contraejemplo cuando sea necesario:
a. Si A y B son dos matrices cuadradas tales que AB = (0), entonces A=(0) ó B=(0)
b. Una matriz cuadrada A es invertible si y sólo si su matriz transpuesta A^t es invertible.
c. No existe ninguna matriz que sea a la vez simétrica y antisimétrica.
d. Toda matriz antisimétrica de orden n con n impar no es invertible.

Solución:

a) Esta afirmación es **falsa**. Sólo se cumple si una de las matrices, la A o la B es regular, pues en tal caso, si $\exists$ A^{-1}, premultiplicando en la igualdad $A \cdot B = (0)$ por $A^{-1} \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot B = (0) \Rightarrow B = (0)$. Pero en general la propiedad no es cierta, como lo prueba el siguiente contraejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq (0) \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq (0) \ \text{ y } A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Esta afirmación es **verdadera**, porque sabemos que $|A|=|A^t|$, entonces obviamente, si A es invertible, $|A|\neq 0$, y también $|A^t|\neq 0$, es decir, la matriz A^t también es invertible.

c) Para que una matriz sea simétrica $A = A^t \Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji} \ \forall i, j$. Pero para que sea antisimétrica $A = -A^t \Leftrightarrow a_{ij} = -a_{ji} \ \forall i, j \Leftrightarrow$ la única opción es que $a_{ij} = 0 \ \forall i, j \Leftrightarrow A = (0)$. Luego, la afirmación es **falsa**, pues existe la matriz nula.

d) Si A antisimétrica $A = -A^t \Leftrightarrow |A| = |-A^t| \underset{\text{por las propiedades de los determinantes}}{=} (-1)^n \cdot |A|$, siendo n el orden de la matriz. Entonces, si n es impar, se tiene $|A| = -|A| \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow$ A no invertibe. Por tanto, la afirmación es **verdadera**.

2.- Se considera el sistema lineal siguiente:

$$\begin{aligned} x + \ \ y + bz &= 1 \\ x + by + \ \ z &= 1 \\ bx + \ \ y + \ \ z &= 1 \end{aligned}$$

donde b es un número real. Discutir en función de los valores del parámetro b y resolver, cuando sea posible, utilizando transformaciones elementales.

Solución:

Escribimos la matriz de los coeficientes del sistema ampliada con el término independiente y realizamos transformaciones elementales de filas que transformen el sistema en otro equivalente:

$$(A|b)=\begin{pmatrix}1&1&b|&1\\1&b&1|&1\\b&1&1|&1\end{pmatrix}<\begin{matrix}F_2-F_1\\F_3-b\cdot F_1\end{matrix}>\begin{pmatrix}1&1&b\ |&1\\0&b-1&1-b|&0\\0&1-b&1-b^2\ |&1-b\end{pmatrix}<F_3+F_2>\begin{pmatrix}1&1&b\ |&1\\0&b-1&1-b|&0\\0&0&2-b-b^2\ |&1-b\end{pmatrix}$$

Ahora estudiamos el rango de la matriz A y el de la ampliada:

$|A|=(b-1)\cdot(2-b-b^2)=(b-1)\cdot(1-b)\cdot(b+2)=0 \Leftrightarrow b=1$ ó $b=-2.$ Entonces, los casos que hay que distinguir son:

- $b\neq 1$ y $b\neq -2 \Rightarrow \text{rango}(A)=\text{rango}(A\,|\,b)=3=\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Rightarrow$

Sistema compatible determinado $\Rightarrow$ solución única.

Para obtener la solución podemos resolver el sistema triangular equivalente:

$$\begin{cases}x+\quad y+\quad b\cdot z=1\\ \quad (b-1)\cdot y+\quad (1-b)\cdot z=0\\ \quad\quad (2-b-b^2)\cdot z=1-b\end{cases}\xrightarrow[\text{despejando 1º la z, luego la y y finalmente la x}]{}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=1-y-b\cdot z=1-(b+1)\cdot\dfrac{1}{b+2}=\dfrac{b+2-b-1}{b+2}=\dfrac{1}{b+2}\\ y=z=\dfrac{1}{b+2}\\ z=\dfrac{1-b}{(1-b)(b+2)}=\dfrac{1}{b+2}\end{cases}$$

- Si $b=1 \Rightarrow \text{rango}(A)=\text{rango}(A\,|\,b)=1<\text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Rightarrow$

Sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ infinitas soluciones de la forma:

$x+y+z=1\Rightarrow x=1-y-z\quad \forall\, y,z\in\mathbb{R}$

- Si $b=-2 \Rightarrow$ la matriz triangular queda:

$$\begin{pmatrix}1&1&-2|&1\\0&-3&3|&0\\0&0&0|&3\end{pmatrix}\Rightarrow \text{rango}(A)=2 \text{ pero } \text{rango}(A\,|\,b)=3 \text{ pues el menor }\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-3&0\\0&0&3\end{vmatrix}\neq 0$$

$\Rightarrow$ Sistema Incompatible.

3.- Supongamos que en $\mathbb{R}^3$ un vector v tiene componentes $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ respecto de una base $B=\{e_1,e_2,e_3\}$. Determinar un vector $u_3\in\mathbb{R}^3$, de forma que junto con $u_1=e_1-e_2$ y $u_2=e_2+e_3$ formen una base de $\mathbb{R}^3$ en las que el vector v tenga por componentes $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Solución:

La nueva base de $\mathbb{R}^3$ será
$B' = \{\mathbf{u_1} = \mathbf{e_1} - \mathbf{e_2}, \mathbf{u_2} = \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}, \mathbf{u_3} = a \cdot \mathbf{e_1} + b \cdot \mathbf{e_2} + c \cdot \mathbf{e_3}\}$, siendo la matriz de paso de B a B' $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$. Se trata entonces de hallar a, b, c, para que se cumpla:

$$C_B(\mathbf{v}) = P \cdot C_{B'}(\mathbf{v}) \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 1 + a \\ 2 = -1 + 1 + b \\ 1 = 1 + c \end{cases} \Rightarrow a = 2,\ b = 2,\ c = 0 \Rightarrow \mathbf{u_3} = 2 \cdot \mathbf{e_1} + 2 \cdot \mathbf{e_2}.$$

Además es linealmente independiente de $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ porque el determinante de P es:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

4.- Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación lineal, siendo E y F espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensiones n y m, respectivamente. Sean $U = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, .., \mathbf{u_n}\}$ y $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_m}\}$ bases de E y F, respectivamente. Demostrar que asociada a f en las bases U y V existe una única matriz A, tal que, $\forall x \in E$ se cumple: $C_V(\mathbf{f(x)}) = \mathbf{A} \cdot C_U(\mathbf{x})$, donde por $C_V(\mathbf{f(x)})$ denotamos las coordenadas de f(x) en la base V y por $C_U(\mathbf{x})$ denotamos las coordenadas de x en la base U. Interpretar dicha matriz.

Solución:

Sean $U = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \cdots, \mathbf{u_n}\}$ y $V = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \cdots, \mathbf{v_m}\}$ bases de E y F respectivamente. Si $\mathbf{x} \in E$ entonces, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} + \cdots + x_n\mathbf{u_n}$, es decir, $C_U(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ son las coordenadas de $\mathbf{x}$ en la base U. Consideremos su imagen, $f(\mathbf{x}) \in F$, que se expresará como $f(\mathbf{x}) = y_1\mathbf{v_1} + y_2\mathbf{v_2} + \cdots + y_m\mathbf{v_m}$, es decir, $C_V(f(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ son las coordenadas de $f(\mathbf{x})$ en la base V. Por ser f una aplicación lineal:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} + \cdots + x_n\mathbf{u_n}) = x_1 f(\mathbf{u_1}) + x_2 f(\mathbf{u_2}) + \cdots + x_n f(\mathbf{u_n})$$

Por tanto, las coordenadas de *f*(**x**), serán iguales a las coordenadas del vector $x_1 f(\mathbf{u_1}) + x_2 f(\mathbf{u_2}) + \cdots + x_n f(\mathbf{u_n})$, y por ser la aplicación coordenada lineal, se tendrá:

$C_V\left(f(\mathbf{x})\right) = x_1 C_V\left(f(\mathbf{u_1})\right) + x_2 C_V\left(f(\mathbf{u_2})\right) + \cdots + x_n C_V\left(f(\mathbf{u_n})\right)$. Es decir, podemos expresar matricialmente esta relación en la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ C_V\left(f(\mathbf{u_1})\right) & C_V\left(f(\mathbf{u_2})\right) & \cdots & C_V\left(f(\mathbf{u_n})\right) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

O abreviadamente: $C_V\left(f(\mathbf{x})\right) = A \cdot C_U(\mathbf{x})$. La matriz A se llama matriz de f respecto a las bases U y V. Nótese que la primera columna de A está formada por las coordenadas, respecto a la base V, de la imagen, por *f*, del primer vector de la base U. La segunda columna, está formada por las coordenadas, respecto a la base V, de la imagen, por *f*, del segundo vector de la base U. En general, la j-ésima columna está formada por las coordenadas, respecto a la base V, de la imagen, por *f*, del j-ésimo vector de la base U. Además, A es una matriz de orden $m \times n$, siendo dim E = n y dim F = m y es única fijadas las bases U y V por la unicidad de las coordenadas de cada vector respecto a una base concreta. Del resultado anterior se deduce que todas las aplicaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita son equivalentes a la multiplicación matricial de los vectores coordenados. Esquemáticamente:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \mathbf{x} \in E & \longrightarrow & \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in F \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathbf{x_U} & \xrightarrow{A} & \mathbf{y_V} = A\mathbf{x_U} \end{array}$$

siendo:

$\mathbf{x_U}$: vector coordenado de **x** referido a la base U, es decir, $\mathbf{x_U} = C_U(\mathbf{x})$.

$\mathbf{y_V}$: vector coordenado de **y** referido a la base V , es decir, $\mathbf{y_V} = C_V(\mathbf{y})$.

A: matriz de f respecto a las bases U y V.

5.- Se consideran los subespacios vectoriales

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ -x + y = 0, t = z \right\} \quad \mathbf{y} \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = ay - at, z = -ay + at \right\}$$

a) Calcular la constante “a” para que S+T tenga dimensión 3.

b) Con el valor de a obtenido en el apartado anterior obtener una base de $S\cap T$.

<u>Solución:</u>

a) Como $S=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x=y, t=z\}\Rightarrow \exists n\ 2\text{ ecuaciones cartesianas}\Rightarrow \dim(S)=2$ y como $S=\text{Span}\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$, una base de S es $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$.

Como $T=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \,/\, x=ay-at, z=-ay+at\}\Rightarrow \exists n\ 2\text{ ecuaciones cartesianas}\Rightarrow \dim(T)=2$ y como $T=\{(ay-at,y,-ay+at,t)\,/\,y,t\in\mathbb{R}\}=\text{Span}\{(a,1,-a,0),(-a,0,a,1)\}$, una base de T está formada por los vectores $\{(a,1,-a,0),(-a,0,a,1)\}$, ya que son linealmente independientes $\forall$ a.

Entonces, un sistema generador del subespacio suma S+T está formado por los cuatro vectores $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(a,1,-a,0),(-a,0,a,1)\}$. Para que la dimensión de S+T sea tres, solo podrá haber tres vectores linealmente independientes de entre los 4 anteriores, es decir, el rango de la matriz que tiene por columnas las coordenadas de tales vectores debe ser 3 y por tanto su determinante debe ser 0:

$$0=\begin{vmatrix}1&0&a&-a\\1&0&1&0\\0&1&-a&a\\0&1&0&1\end{vmatrix}=<C_4-C_2>=\begin{vmatrix}1&0&a&-a\\1&0&1&0\\0&1&-a&a-1\\0&1&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&-a\\1&1&0\\0&-a&a-1\end{vmatrix}=<F_2-F_1>=$$

$$=\begin{vmatrix}1&a&-a\\0&1-a&a\\0&-a&a-1\end{vmatrix}=(1-a)(a-1)+a^2=-1+2a\Rightarrow a=\frac{1}{2}.$$

Luego para el valor de a=1/2 la dimensión de S+T es 3, ya que, como puede observarse, el rango de la matriz anterior para ese valor de a=1/2 es 3:

$$\text{rango}\left[\begin{pmatrix}1&0&1/2|&-1/2\\1&0&1|&0\\\underline{0}&\underline{1}&\underline{-1/2}|&1/2\\0&1&0&1\end{pmatrix}\right]=3 \text{ y } S+T=\text{Span}\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1/2,1,-1/2,0)\}.$$

b) Para a=1/2, se trata de hallar ahora el subespacio intersección $S\cap T$. Sabemos que su dimensión será $\dim(S\cap T)=\dim(S)+\dim(T)-\dim(S+T)=2+2-3=1$ y sus ecuaciones cartesianas las obtendremos quedándonos con las tres ecuaciones linealmente independientes de entre las de S y las de T:

$$\begin{array}{l}\text{Ecuaciones } S\equiv\begin{cases}x=y\\t=z\end{cases}\\ \text{Ecuaciones } T\equiv\begin{cases}x=1/2\cdot y-1/2\cdot t\\z=-1/2\cdot y+1/2\cdot t\end{cases}\end{array}\underset{\text{quedándonos con las 3 primeras}}{\Rightarrow}\begin{cases}x=y\\t=z\\x-1/2\cdot x=-1/2\cdot t\Rightarrow x=-t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=x\\z=-x\\t=-x\end{cases}$$

$$\Rightarrow S\cap T=\text{Span}\{(1,1,-1,1)\}.$$

6.- Sea V un subespacio de $E_{3x3}(\mathbb{R})$ formado por las matrices $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 & a_{11} \end{pmatrix}$, tales que a_{11}, a_{12} , $a_{13} \in \mathbb{R}$. Se considera la aplicación:

$$\begin{aligned} f: V &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow f(A)=|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{13}| \end{aligned}$$

Estudiar si dicha aplicación es norma comprobando todos los axiomas.

<u>Solución:</u>

Sabemos que una aplicación $\| \ \|: \quad E \rightarrow \mathbb{R}^+$

$$\mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\|$$

siendo E un espacio vectorial real es *norma* , si verifica los siguientes axiomas:

a) $\|\mathbf{x}\| \geq 0, \ \forall \ \mathbf{x} \in \ E \ \wedge \ \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$

b) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \, \|\mathbf{x}\|, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \ \wedge \ \forall\mathbf{x} \in E$, donde $|\lambda|$ representa el valor absoluto de λ.

c) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|, \quad \forall\mathbf{x},\mathbf{y} \in E$ (*desigualdad triangular*).

Veamos si esta aplicación cumple los tres axiomas anteriores:

i) $\forall A \in V \ f(A)=|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{13}| \geq 0$, esto es evidente por ser suma de valores absolutos, que son cantidades positivas.

Si $f(A)=|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{13}|=0 \Leftrightarrow a_{11}=a_{12}=a_{13}=0 \Leftrightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=(0)$. Luego también se cumple esta propiedad.

ii) $\forall\lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall A \in V \quad f(\lambda \cdot A)=\lambda \cdot f(A)$.

Pero $f(\lambda \cdot A)=|\lambda \cdot a_{11}|+|\lambda \cdot a_{12}|+|\lambda \cdot a_{13}|=|\lambda| \cdot (|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{13}|)=|\lambda| \cdot f(A).$ Luego este axioma también se cumple.

iii) Desigualdad triangular: $\forall A,B \in V \ f(A+B) \leq f(A)+f(B)$:

Como

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ 0 & a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ 0 & 0 & a_{11}+b_{11} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$f(A+B)=|a_{11}+b_{11}|+|a_{12}+b_{12}|+|a_{13}+b_{13}| \leq |a_{11}|+|b_{11}|+|a_{12}|+|b_{12}|+|a_{13}|+|b_{13}|=f(A)+f(B)$$

donde se ha tenido en cuenta que el valor absoluto también cumple que $|a+b| \leq |a|+|b|$.

Luego también se cumple esta tercera propiedad y consecuentemente, esta aplicación es norma.

7.- Sea $\mathbb{P}_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales. Se considera la aplicación lineal definida como:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{P}_2(x) &\longrightarrow \mathbb{P}_2(x) \\ p(x) &\longrightarrow f(p(x)) = p(x) + x^2 \cdot p\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

a) Hallar la expresión matricial de esta aplicación en la base canónica de $\mathbb{P}_2(x)$.

b) Obtener, sin utilizar la matriz de la aplicación, las ecuaciones cartesianas y una base del subespacio Ker f, así como del subespacio Im f.

c) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Razonar las respuestas.

d) ¿Son los subespacios Ker f e Im f suplementarios? Justificar la respuesta.

Solución:

a) Sea un polinomio $p(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 \in \mathbb{P}_2(x) \Rightarrow$

$$f(p(x)) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 + x^2 \cdot \left(a + b \cdot \frac{1}{x} + c \cdot \frac{1}{x^2} \right) = (a+c) + 2b \cdot x + (a+c) \cdot x^2 \in \mathbb{P}_2(x).$$

Sabemos que la matriz de esta aplicación tiene por columnas las coordenadas en la base canónica de $\mathbb{P}_2(x)$ de las imágenes por f de los vectores de dicha base canónica, esto es: $A = \left(C_B(f(1)) \quad C_B(f(x)) \quad C_B(f(x^2)) \right)$.Se trata de hallar estas imágenes:

$$f(1) = 1 + x^2 \cdot 1 \Rightarrow C_B(f(1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f(x) = x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot x \Rightarrow C_B(f(x)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$f(x^2) = x^2 + x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 1 + x^2 \Rightarrow C_B(f(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \text{Matriz de f}.$$

Como puede observarse esta matriz coincide con la que se deduce al observar la expresión de $f(p(x)) = (a+c) + 2b \cdot x + (a+c) \cdot x^2$, ya que las coordenadas de f(p(x)) en la base canónica son: $C_B(f(p(x))) = \begin{pmatrix} a+c \\ 2b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A \cdot C_B(p(x))$. Ésta es, por tanto, la expresión matricial de f(x).

b) Sabemos que

$$\text{Ker } f = \left\{ p(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2 \in \mathbb{P}_2(x) \ / \ f(p(x)) = (a+c) + 2b \cdot x + (a+c) \cdot x^2 = 0 \ \forall x \right\} \Rightarrow$$

$$\text{Ecuaciones cartesianas del Ker f} \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Rightarrow \dim(\text{Ker f}) = 3 - 2 = 1 \Rightarrow$$

$$p(x) \in \text{Ker f} \Leftrightarrow p(x) = -c + c \cdot x^2 = c \cdot (x^2 - 1) \Rightarrow \text{Base Ker f} \equiv x^2 - 1.$$

Entonces, sabemos por el teorema fundamental de las aplicaciones lineales que $\dim(E) = \dim(\mathbb{P}_2(x)) = 3 = \dim(\text{Ker f}) + \dim(\text{Im f}) = 1 + \dim(\text{Im f}) \Rightarrow \dim(\text{Im f}) = 2,$ y como $\text{Im f} = \text{Span}\left\{ f(1), f(x), f(x^2) \right\} = \text{Span}\left\{ 1 + x^2, 2x, 1 + x^2 \right\} \Rightarrow$ una base de Imf es

$\{1+x^2, 2x\}$. Por tanto, este subespacio tiene una ecuación cartesiana, que a la vista de la forma de los polinomios $f(p(x)) = (a+c) + 2b\cdot x + (a+c)\cdot x^2 = 0$, es a=c. Es decir, un polinomio $p(x) = a + b\cdot x + c\cdot x^2 \in \mathrm{Im}\, f \Leftrightarrow c - a = 0 \equiv \text{Ecuación cartesiana de } \mathrm{Im}\, f$.

c) Esta aplicación no es ni inyectiva ni sobreyectiva, porque según acabamos de ver $\mathrm{Ker}\, f \neq 0_{\mathbb{P}_2(x)}$ e $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{P}_2(x)$.

d) Como Ker f e Im f son ambos subespacios de $\mathbb{P}_2(x)$, serán suplementarios si $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f = \mathbb{P}_2(x)$, siendo $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = 0_{\mathbb{P}_2(x)}$. Hemos visto que una base del Ker f es x^2-1 y una del Im f es $\{1+x^2, 2x\}$, entonces un sistema generador del subespacio suma es $\{x^2-1, 1+x^2, 2x\}$, pero estos tres polinomios son linealmente independientes, porque la matriz que tiene por columnas sus coordenadas en la base canónica $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 3, ya que su determinante vale 4. Luego $\dim(\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f) = 3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f) = 0$ y por tanto, Ker f e Im f sí son subespacios suplementarios.

8.- Sea $f : E \longrightarrow F$ una aplicación cuya matriz asociada en las bases $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de E y $B' = \{\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2\}$ de F es: $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Sabiendo que la matriz asociada a la misma aplicación respecto a la base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de E y a otra base $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de F es: $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Deducir la relación de equivalencia existente entre las matrices $\mathbf{A}_1$ y $\mathbf{A}_2$, y calcular la base U del espacio F.

b) Hallar el vector o vectores de E cuya imagen por f es el vector $\mathbf{v} = 4\cdot\mathbf{u}_1 + 3\cdot\mathbf{u}_2$. ¿Es el conjunto obtenido un subespacio vectorial de E? Justificar la respuesta.

<u>**Solución:**</u>

a) Al cambiar de base en el espacio vectorial F, se tiene el siguiente esquema:

$$
\begin{array}{ccccl}
E\ (\dim 3) & \xrightarrow{f} & F\,(\dim 2) & & \\
\text{Base } B & \xrightarrow{A_1} & \text{Base } B' & & \\
P = I\ \uparrow & & \uparrow & & R = \begin{pmatrix} \overset{\uparrow}{C_{B'}(\mathbf{u_1})} & \overset{\uparrow}{C_{B'}(\mathbf{u_2})} \end{pmatrix} \equiv \text{Matriz de paso de } U \text{ a } B' \\
\text{Base } B & \xrightarrow{A_2} & \text{Base } U & &
\end{array}
$$

Además en el espacio F se cumple la siguiente relación de coordenadas: $C_{B'}\left(f(x)\right) = R \cdot C_U\left(f(x)\right) \ (*)$. Pero como A_1 es la matriz asociada a f en las bases B y B' de E y F, respectivamente, sabemos que también se cumple:

$$C_{B'}\left(f(x)\right) = A_1 \cdot C_B\left(x\right) \underset{\text{por }(*)}{=} R \cdot C_U\left(f(x)\right) \xrightarrow[\text{premultiplicando por } R^{-1}]{} C_U\left(f(x)\right) = R^{-1} \cdot A_1 \cdot C_B\left(x\right).$$

Pero como A_2 es la matriz asociada a f en las bases B y U de E y F, respectivamente, se tiene también: $C_U\left(f(x)\right) = A_2 \cdot C_B\left(x\right) = R^{-1} \cdot A_1 \cdot C_B\left(x\right) \Rightarrow A_2 = R^{-1} \cdot A_1$, es decir, las matrices A_1 y A_2 verifican esta relación de equivalencia: $A_2 = R^{-1} \cdot A_1 \cdot I$.

Para calcular ahora la base $U = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ de F podemos usar esta relación. Llamando a $R = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, entonces, como $A_2 = R^{-1} \cdot A_1 \Leftrightarrow R \cdot A_2 = A_1 \Leftrightarrow$ se debe cumplir el sistema:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} (1/2)\cdot c = 1 \ \Leftrightarrow c = 2 \\ 4\cdot a + 3\cdot c = 1 \\ c = 2 \\ (1/2)\cdot d = 0 \Leftrightarrow d = 0 \\ 4\cdot b + 3\cdot d = 2 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{5}{4},\ b = \frac{1}{2},\ c = 2,\ d = 0$$

$$\Rightarrow R = \begin{pmatrix} -5/4 & 2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{La base U de F es: } U = \left\{ \mathbf{u_1} = \frac{-5}{4}\mathbf{e_1'} + \frac{1}{2}\mathbf{e_2'}, \mathbf{u_2} = 2\mathbf{e_1'} \right\}.$$

b) Se trata de hallar la antiimagen del vector $\mathbf{v} = 4\cdot\mathbf{u_1} + 3\cdot\mathbf{u_2}$, es decir, los vectores de E de coordenadas (x_1, x_2, x_3) en la base B tales que $A_2 \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = 1 \\ 1/2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = -2x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

El conjunto obtenido es $S = \left\{ \left(-2x_3, 1, x_3\right) / x_3 \in \mathbb{R} \right\}$. Pero este conjunto no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ porque $(0,0,0) \notin S$, S no es estable para la suma, ya que si $\mathbf{x} = \left(-2x_3, 1, x_3\right) \in S$, $\mathbf{y} = \left(-2y_3, 1, y_3\right) \in S$ pero $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \left(-2x_3 - 2y_3, 2, x_3 + 2y_3\right) \notin S$ y S tampoco es estable para el producto por un escalar porque si $\mathbf{x} = \left(-2x_3, 1, x_3\right) \in S$, $\lambda \cdot \mathbf{x} = \left(-2\lambda x_3, \lambda, \lambda x_3\right) \notin S \ \forall \lambda \neq 1$.