ÁLGEBRA LINEAL – Examen Final – (19 de Mayo de 2013)

PRIMERA PARTE

1.- Calcular la inversa de la matriz M en función de los valores de $\propto$, utilizando la teoría de bloques. ¿Qué valores de $\propto$ hacen a M regular?

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \alpha & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1.5 puntos)

<u>Solución:</u>

a) Calculamos M^{-1} utilizando la teoría de las matrices particionadas. Para ello particionamos M en la forma $M=\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \alpha & 1 & 0 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} \underset{2x2}{A_{11}} & \underset{2x3}{A_{12}} \\ \hline \underset{3x2}{A_{21}} & \underset{3x3}{A_{22}} \end{array}\right)$. Al ser los bloques diagonales cuadrados consideramos la matriz M^{-1} dividida en la misma forma que M, es decir: $M^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} X_{2x2} & Y_{2x3} \\ \hline Z_{3x2} & T_{3x3} \end{array}\right)$ y calculamos estos bloques X, Y, Z, T imponiendo que $M\cdot M^{-1}=I$, es decir:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline (0) & A_{22} \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & T \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} I_{2x2} & (0) \\ \hline (0) & I_{3x3} \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_{11}\cdot X+A_{12}\cdot Z=I\xrightarrow[\text{por } A_{11} \text{ regular}]{}X=A_{11}^{-1} \\ A_{11}\cdot Y+A_{12}\cdot T=(0)\xrightarrow[\text{por } A_{11} \text{ regular}]{}Y=-A_{11}^{-1}\cdot A_{12}\cdot T=-A_{11}^{-1}\cdot A_{12}\cdot A_{22}^{-1} \\ A_{22}\cdot Z=(0)\xrightarrow[\text{por } A_{22} \text{ regular}]{}Z=(0) \\ A_{22}\cdot T=I\xrightarrow[\text{por } A_{22} \text{ regular}]{}T=A_{22}^{-1} \end{cases}$$

Hallemos estos bloques:
Efectivamente A_{22} es regular porque su determinante es:

$$\left|A_{22}\right|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}<F_3-F_1>\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$; entonces, $A_{22}^{-1}=\frac{1}{\left|A_{22}\right|}\cdot A_{22}^{adj}$. Para calcular la adjunta empezamos trasponiendo $A_{22}\Rightarrow$

$$A_{22}'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow A_{22}^{adj}=\begin{pmatrix} 4 & -2 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow A_{22}^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}=T$$

El bloque A_{11} también es regular porque su determinante es:
$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \forall \alpha \Rightarrow A_{11}^{-1} = \frac{1}{|A_{11}|} \cdot A_{11}^{adj} \Rightarrow A_{11}' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{11}^{adj} = A_{11}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} = X$$

Finalmente calculamos Y:
$$Y = -A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \cdot A_{22}^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} =$$
$$-\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -\alpha & -2\alpha & -5\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4\alpha & -\alpha & -3\alpha \end{pmatrix} = Y$$
Por tanto la matriz
$$M^{-1} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ -\alpha & 1 & 4\alpha & -\alpha & -3\alpha \\ \hline 0 & 0 & -4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \text{ que existe } \forall \alpha.$$

2. En el espacio vectorial real de las matrices cuadradas de orden 2, $E_{2x2}(\mathbb{R})$, se consideran los subespacios U y V siguientes:
$$U = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_{2x2}(\mathbb{R}) \,/\, A \cdot X = X \cdot A \right\}$$
$$V = \left\{ Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E_{2x2}(\mathbb{R}) \,/\, A \cdot Y^t = Y \right\}$$
siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Obtener las matrices X e Y pertenecientes a los subespacios U y V, respectivamente. Escribir las ecuaciones paramétricas de ambos subespacios, y hallar una base de U, B_U, y otra base de V, B_V. (1.5 puntos)

b) Hallar los subespacios intersección, $U \cap V$, y suma, $U + V$, dando una base de cada uno así como sus ecuaciones implícitas y paramétricas. (1.25 puntos)

c) ¿De cuantas formas se puede descomponer una matriz $M \in (U + V)$ como suma de una matriz del subespacio U y otra matriz del subespacio V? Razona la respuesta. (0.5 puntos)

<u>**Solución:**</u>

a) Si $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} \\ X\cdot A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+b & a+2b \\ c+d & c+2d \end{pmatrix} \end{cases}$, de donde

$$A\cdot X=X\cdot A \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=a+b \Rightarrow c=b \\ b+d=a+2b \Rightarrow d=a+b \\ a+2c=c+d \Rightarrow d=a+c=a+b \\ b+2d=c+2d \Rightarrow c=b \end{cases} \quad \text{Luego}$$

$$U=\left\{X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} / \ a,b\in\mathbb{R}\right\}=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$
$$=\text{Span}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$$

y $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2$ son linealmente independientes ya que la relación $\alpha_1\cdot\mathbf{u}_1+\alpha_2\cdot\mathbf{u}_2=(\mathbf{0}) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \end{cases}$. Por tanto, $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}$ es base de U.

Si $Y=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} Y^t=\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \\ A\cdot Y^t=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y & z+t \\ x+2y & z+2t \end{pmatrix} \end{cases}$, de donde

$$A\cdot Y^t=Y^t \Leftrightarrow \begin{cases} x=x+y \Rightarrow y=0 \\ y=z+t \Rightarrow z+t=0 \Rightarrow t=-z \\ z=x+2y \Rightarrow z=x \\ t=x+2t \Rightarrow t=-x \end{cases} \quad \text{Luego}$$

$V=\left\{Y=\begin{pmatrix} x & 0 \\ x & -x \end{pmatrix}=x\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \ / \ x\in\mathbb{R}\right\}=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\}=\text{Span}\{\mathbf{v}_1\}$ **y** $\mathbf{v}_1$ es la base de V.

Las ecuaciones paramétricas de U y V se obtienen teniendo en cuenta que

- Si $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in U=\text{Span}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\alpha_1\cdot\mathbf{u}_1+\alpha_2\cdot\mathbf{u}_2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a=\alpha_1 \\ b=\alpha_2 \\ c=\alpha_2 \\ d=\alpha_1+\alpha_2 \end{cases}$$ con $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$ son las ecuaciones paramétricas de U.

-Si $Y=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in V=\text{Span}\{\mathbf{v}_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \alpha\cdot\mathbf{v}_1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=0 \\ z=\alpha \\ t=-\alpha \end{cases}$$ con $\alpha\in\mathbb{R}$ son las ecuaciones paramétricas de V.

b) Si $B\in U\cap V \Rightarrow \begin{cases} B\in U \Rightarrow B=\alpha_1\cdot\mathbf{u}_1+\alpha_2\cdot\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1+\alpha_2 \end{pmatrix} \\ B\in V \Rightarrow B=\alpha\cdot\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix} \end{cases}$ y por tanto debe cumplirse que $\begin{cases} \alpha=\alpha_1 \\ 0=\alpha_2 \\ \alpha=\alpha_2 \\ \alpha=\alpha_1+\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha=0$ y $B=(\mathbf{0})$. En consecuencia, para $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in U\cap V$ las ecuaciones cartesianas son $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \\ t=0 \end{cases}$ que también pueden considerarse como ecuaciones paramétricas.

En cuanto a $U+V$ sabemos que $U+V=\text{Span}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1\}$ y que $\dim(U+V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V)=2+1-0=3$. Por tanto $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{v}_1\}$ será una base de U+V y si

$$B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in U+V \Rightarrow B=\alpha_1\cdot\mathbf{u}_1+\alpha_2\cdot\mathbf{u}_2+\alpha_3\cdot\mathbf{v}_1=\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_2+\alpha_3 & \alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=\alpha_1+\alpha_3 \\ y=\alpha_2 \\ z=\alpha_2+\alpha_3 \\ t=\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3 \end{cases}$$ con $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ serán las ecuaciones paramétricas de U+V.

Como $\dim(\mathrm{U+V}) = \dim(\mathrm{E}_{2x2}(\mathbb{R})) - \text{nº ecuaciones cartesianas} = 3 \Rightarrow$ U+V tiene una única ecuación cartesiana que obtendremos operando en las ecuaciones anteriores

$$y = \alpha_2 \Rightarrow z = y + \alpha_3 \Rightarrow \alpha_3 = z - y \Rightarrow t = \alpha_1 + y - z + y = 2y - z + \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = t - 2y + z \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = t - 2y + z + z - y = t - 3y + 2z \Rightarrow$$

$x + 3y - 2z - t = 0$ es la ecuación cartesiana de U+V.

c) Como el subespacio vectorial U+V verifica que $\mathrm{U} \cap \mathrm{V} = (\mathbf{0})$, podemos afirmar que si $\mathrm{M} \in \mathrm{U} + \mathrm{V}$ entonces M puede escribirse de forma única como suma de un elemento de U más otro de V.

3. a) Demostrar que las coordenadas de un vector en una base de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ de dimensión n son únicas. (0.5 puntos)

b) Demostrar que el Núcleo de una aplicación lineal $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial E. (0.25 puntos)

c) Sea $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales. Demostrar que si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ es un conjunto de vectores linealmente dependientes en E, entonces $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), ..., f(\mathbf{u}_p)\}$ es también un conjunto ligado en F. (0.25 puntos)

d) Sea $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales E y F sobre $\mathbb{K}$, de dimensiones n y m, respectivamente. Si dim Ker f = p, tal que 0<p<n, demostrar que p = n - dim Im f. (1 punto)

<u>**Solución:**</u>

a) Sea B = $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ una base de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$ y sea un vector $\mathbf{x} \in$ E. Supongamos que el vector $\mathbf{x}$ se puede expresar de dos formas como combinación lineal de los vectores de B:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + ... + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{x} = x'_1\mathbf{e}_1 + x'_2\mathbf{e}_2 + ... + x'_n\mathbf{e}_n$$

Restando ambas expresiones resulta:

$$\mathbf{0} = (x_1 - x'_1)\,\mathbf{e}_1 + (x_2 - x'_2)\,\mathbf{e}_2 + ... + (x_n - x'_n)\,\mathbf{e}_n.$$

Ahora bien, siendo la base una familia libre se llega a que:

$$x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2 = ... = x_n - x'_n = 0$$

de donde: $x_i = x'_i \quad \forall$ i=1,2,…,n. En consecuencia, $\mathbf{x}$ se expresa de manera única, es decir, las coordenadas $x_1, x_2, ..., x_n$ del vector $\mathbf{x}$ en la base B son únicas.

b) Como sabemos $\mathrm{Ker}\, f = \left\{\mathbf{x} \in E \;/\; f(\mathbf{x}) = \mathbf{0_F}\right\}$, entonces para demostrar que es un subespacio vectorial de E hay que demostrar que es estable para la suma y para el producto por un escalar y que el vector nulo pertenece a Ker f. En efecto:

i) El vector $\mathbf{0_E} \in \mathrm{Ker}\, f$ ya que $f(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F}$ y por tanto, $\mathrm{Ker}\, f \neq \{\varnothing\}$

ii) Veamos que $\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\, f \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\, f$

Sean $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\, f$: $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \underset{f\ lineal}{=} f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \underset{\mathbf{x}\in Ker\ f,\mathbf{y}\in Ker\ f}{=} \mathbf{0_F} + \mathbf{0_F} = \mathbf{0_F} \Rightarrow \mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\, f$

iii) Veamos finalmente que $\forall\, \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\, f \wedge \forall \alpha \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\, f$

Sean $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\, f \wedge \alpha \in \mathbb{K}$: $f(\alpha\cdot\mathbf{x}) \underset{f\ \mathrm{lineal}}{=} \alpha \cdot f(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{x}\in Ker\ f}{=} \alpha \cdot \mathbf{0_F} = \mathbf{0_F} \Rightarrow \alpha\cdot\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\, f$.

Queda así demostrado que Ker *f* es un subespacio vectorial de E.

c) Sean $\{\mathbf{u_1},\mathbf{u_2},...,\mathbf{u_p}\}$ un conjunto de vectores linealmente dependientes en $E \Longrightarrow$ existe una relación de dependencia entre ellos de la forma: $\mathbf{0_E} = \alpha_1\cdot\mathbf{u_1} + \alpha_2\cdot\mathbf{u_2} + ... + \alpha_p\cdot\mathbf{u_p}$, siendo algún $\alpha_i \neq 0$. Pero entonces tomando imágenes por *f* y teniendo en cuenta que es una aplicación lineal obtenemos:

$$f(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F} = f(\alpha_1\cdot\mathbf{u_1} + \alpha_2\cdot\mathbf{u_2} + ... + \alpha_p\cdot\mathbf{u_p}) = \alpha_1\cdot f(\mathbf{u_1}) + \alpha_2\cdot f(\mathbf{u_2}) + ... + \alpha_p\cdot f(\mathbf{u_p}) \text{ con algún } \alpha_i \neq 0.$$

Queda así probado que el conjunto de vectores de F $\left\{f(\mathbf{u_1}), f(\mathbf{u_2}),..., f(\mathbf{u_p})\right\}$ es un sistema ligado.

d) Supongamos que $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = p \,/\, 0 < p < n = \dim(E) \Rightarrow$ una base del Ker *f* tendrá p vectores de la forma $\left\{\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \cdots,\ \mathbf{e_p}\right\}$. Completamos esta base con (n-p) vectores linealmente independientes hasta obtener una base de E: $\left\{\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \cdots,\ \mathbf{e_p},\ \mathbf{e_{p+1}},\ ...,\ \mathbf{e_n}\right\}$. Pero entonces se tiene que el subespacio imagen Im f está generado por:

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Span}\left\{f(\mathbf{e_1}),\ f(\mathbf{e_2}),\ \cdots,\ f(\mathbf{e_p}),\ f(\mathbf{e_{p+1}}),\ ...,\ f(\mathbf{e_n})\right\} = \mathrm{Span}\left\{f(\mathbf{e_{p+1}}),\ ...,\ f(\mathbf{e_n})\right\}$, por ser $f(\mathbf{e_i}) = \mathbf{0_F}\quad \forall\, i = 1,2,\cdots,p$. Si vemos que éste es un conjunto libre, ya tendríamos probado que $\dim(\mathrm{Im}\, f) = n - p \Rightarrow p = n - \dim(\mathrm{Im}\, f)$, es decir, el resultado que queremos demostrar.

Se construye la combinación lineal nula: $b_{p+1}\cdot f(\mathbf{e_{p+1}}) + b_{p+2}\cdot f(\mathbf{e_{p+2}}) + \cdots + b_n \cdot f(\mathbf{e_n}) = \mathbf{0_F}$ y por ser *f* lineal $\Rightarrow f(b_{p+1}\cdot\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\cdot\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\cdot\mathbf{e_n}) = \mathbf{0_F}$. Luego el vector $b_{p+1}\cdot\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\cdot\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\cdot\mathbf{e_n}$ está en Ker *f* y por tanto será combinación lineal de los vectores de la base del Ker *f*, es decir:

$$b_{p+1}\cdot\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\cdot\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\cdot\mathbf{e_n} = a_1\cdot\mathbf{e_1} + a_2\cdot\mathbf{e_2} + \cdots + a_p\cdot\mathbf{e_p} \Rightarrow$$

$$-a_1\cdot\mathbf{e_1} - a_2\cdot\mathbf{e_2} - \cdots - a_p\cdot\mathbf{e_p} + b_{p+1}\cdot\mathbf{e_{p+1}} + b_{p+2}\cdot\mathbf{e_{p+2}} + \cdots + b_n\cdot\mathbf{e_n} = \mathbf{0_E}$$

y como $\{\mathbf{e_1},\ \mathbf{e_2},\ \cdots,\ \mathbf{e_p},\ \mathbf{e_{p+1}},\ ...,\ \mathbf{e_n}\}$ es una base de E, necesariamente todos los coeficientes anteriores son nulos. En particular: $b_{p+1} = b_{p+2} = \cdots = b_n = 0$. Luego, $\{f(\mathbf{e_{p+1}}),\ ...,\ f(\mathbf{e_n})\}$ es un conjunto linealmente independiente y de esta forma ha quedado probado el resultado dim(Ker f) = p = n-dim(Im f).

4. Sean $\mathbb{P}_3(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales y $E_{2x2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de matrices cuadradas de orden 2. Se considera la aplicación lineal definida como:

$$f : \mathbb{P}_3(x) \longrightarrow E_{2x2}(\mathbb{R}) \ \ / \ \ f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a & b-d \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$$

a) Hallar la expresión matricial de f en las bases canónicas de $\mathbb{P}_3(x)$ y de $E_{2x2}(\mathbb{R})$. (1 punto)

b) Obtener las ecuaciones implícitas del subespacio Im f . (0.5 puntos)

c) Obtener una base del subespacio Ker f . (0.5 puntos)

d) ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? Razonar las respuestas. (0.25 puntos)

e) Hallar la matriz asociada a f en la base de $\mathbb{P}_3(x)$, $\mathbb{B}^* = \{x^3,\ x^2 + x,\ 1 + x,\ 1\}$ a partir de la matriz obtenida en el apartado a) en las bases canónicas correspondientes. (0.75 puntos)

f) Hallar el polinomio p(x) tal que su imagen $f(p(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (0.25 puntos)

<u>**Solución:**</u>

a) La matriz asociada a f en la base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ de $\mathbb{P}_3(x)$ y en la base $B' = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ de $E_{2x2}(\mathbb{R})$ tiene por columnas las coordenadas de las imágenes por f de los polinomios 1, x, x^2, x^3, respecto a tal base B'. Calculamos por tanto, tales imágenes:

$$f(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -E_2 \Rightarrow C_{B'}(f(1)) = (0,-1,0,0)^t$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_3 \Rightarrow C_{B'}(f(x)) = (0,0,1,0)^t$$

$$f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 - E_3 \Rightarrow C_{B'}(f(x^2)) = (0,1,-1,0)^t .$$

$$f(x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_1 \Rightarrow C_{B'}(f(x^3)) = (1,0,0,0)^t$$

Por tanto, la matriz de la aplicación en las bases canónicas es: $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dado, entonces, un polinomio $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, las coordenadas de su imagen f(p) en la base usual B' de las matrices se obtienen mediante la expresión matricial siguiente: $f(p)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix}$.

b) Sabemos que $\{f(1), f(x), f(x^2), f(x^3)\}$ es un sistema generador del subespacio Im f y se observa claramente que la matriz $f(x^2)$ es combinación lineal de $f(1)$ y de $f(x)$, mientras que $\{f(1), f(x), f(x^3)\}$ son las tres matrices linealmente independientes, por lo que dim(Imf)=3 y una base de este subespacio es: $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Para obtener, entonces, su única ecuación implícita, tenemos en cuenta que para que una matriz $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\in \operatorname{Im} f$ el rango de la matriz $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ -1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}=3 \Leftrightarrow$

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ -1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & -1 & z \\ 0 & 0 & 0 & t \end{vmatrix}=0=t$. Luego, $t=0$ es la Ecuación Implícita de $\operatorname{Im} f$.

c) Sabemos que el subespacio núcleo es:

$$\operatorname{Ker}(f)=\{p(x)=ax^3+bx^2+cx+d \,/\, f(p)=(\mathbf{0})\equiv \text{Matriz nula}\} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & b-d \\ c-b & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b-d=0 \\ c-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=d \\ c=d \end{cases} \quad \forall d\in \mathbb{R} \Rightarrow$$

Los polinomios del subespacio núcleo serán de la forma:

$p(x)=dx^2+dx+d=d\cdot(1+x+x^2) \Rightarrow$ Base del $\operatorname{Ker} f \equiv 1+x+x^2$.

d) Esta aplicación no es inyectiva porque $\operatorname{Ker} f \neq \mathbf{0}$, pero tampoco es sobreyectiva porque $\operatorname{Im} f \neq E_{2x2}(\mathbb{R})$.

e) Para hallar la matriz de la aplicación f en la nueva base de $\mathbb{P}_3(x)$, $\mathbb{B}^* = \left\{x^3,\ x^2+x,\ 1+x,\ 1\right\}$ a partir de la matriz obtenida en el apartado a), tenemos en cuenta la relación existente entre las matrices de una misma aplicación f: E→F cuando se cambian las bases en los espacios E y F:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}_3(x)\ (\dim\ 4) & \xrightarrow{\ f\ } & E_{2x2}(\mathbb{R})\ (\dim\ 4) \\
\text{Base}\quad B=\left\{1, x, x^2, x^3\right\} & \xrightarrow{\ A_{(4x4)}\ } & \text{Base usual } B' \\
\text{Matriz de paso}\ \Big\downarrow\ P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & \Big\downarrow\quad R=I \\
\text{Base}\ \ B^* = \left\{x^3, x^2+x, 1+x, 1,\right\} & \xrightarrow{\ A_{1(4x4)}\ } & \text{Base usual } B'
\end{array}$$

La matriz en la nueva base es:

$$A_1 = R^{-1}\cdot A\cdot P = A\cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

f) Se trata de hallar el polinomio

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \,/\, f(p) = \begin{pmatrix} a & b-d \\ c-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b-d = 2 \\ c-b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ d = b-2 \quad \forall b \in \mathbb{R}\,. \\ c = 1+b \end{cases}$$

Luego todos los polinomios de la forma $p(x) = x^3 + bx^2 + (1+b)x + b - 2 \quad \forall b \in \mathbb{R}$ son los que tienen por imagen la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.