ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN ARIKETA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

2013–2014 ikasturtea. Bigarren deialdia: 2014ko uztailaren 9a

Abizenak:	
Izena:	**Taldea:**
Ariketa hau egiteko arauak Moodle-en argitaratuta daude, eta ikasleak ezagutu behar ditu	

1. ORRIA

[A] Izan bedi $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrize antisimetrikoa. A^n antisimetrikoa al da? Arrazoitu erantzuna. (**2.5 puntu**)

[B] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ izanik, $\sum_{n=1}^{24} A^n$ kalkulatu (**2.5 puntu**)

Hurrengo galderen ebazpenerako *Mathematica* programako ondoko kodea ematen da:

```
In[1]:= s = {p1[x_] = x^2 - 2, p2[x_] = x^2 + x + 1, p3[x_] = 3 x^2 + 2 x, p4[x_] = 2 x^2 - x - 7};

In[2]:= m1 = Table[CoefficientList[s[[j]], x], {j, 1, Length[s]}];

In[3]:= m2 = RowReduce[m1]

Out[3]= {{1, 0, -1/2}, {0, 1, 3/2}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

Izan bedi honako polinomioen sistema:

$$S = \{ p_1(x) = x^2 - 2,\ p_2(x) = x^2 + x + 1,\ p_3(x) = 3x^2 + 2x,\ p_4(x) = 2x^2 - x - 7 \} \subset \mathbb{P}_3(x)$$

[C] $S \subset \mathbb{P}_3(x)$ sistemako polinomioen koefizienteak errenkadaka dituen M matrizearen heina kalkulatu. (**puntu 1**)

[D] $V = L(S)$ azpiespazio bektorialaren bi oinarri desberdin, B_1 eta B_2 adierazi. Lortu $q(x) = x^2 - 3x - 11 \in S$ polinomioaren koordenatuak aurreko oinarrietako batean eta $\mathbb{P}_3(x)$ -ren beste edozein oinarritan. (**2 puntu**)

[E] Baldin $p(x) \in \mathbb{P}_3(x)$ betetzen bada, $p(x) \in V$ betetzeko baldintza adierazi. (**2 puntu**)

2. ORRIA

$(\mathbb{P}_3(x), <,>)$ espazio bektorial euklidearrean eta ohiko biderkadura eskalarra erabiliz, izan bitez ondorengo azpiespazioak:

$$S = \{ p(x) \in \mathbb{P}_3(x) \,/\, p(x) \perp (x^2+1) \wedge p(x) \perp (x-1) \}$$
$$T = \{ p(x) \in \mathbb{P}_3(x) \,/\, p''(0) = 0,\ p'(1) = -p'(1) \} \subset \mathbb{P}_3(x)$$

[A] S-ren B_S oinarri bat lortu eta bere dimentsioa adierazi. (**2 puntu**)

[B] $S \cap T$ kalkulatu, eta posible bada, oinarri bat eta bere dimentsioa adierazi.(**2 puntu**)

[C] $S + T$ kalkulatu eta batura zuzena den arrazoitu. (**puntu 1**)

[D] Lortu $r(x) = x^3 + x^2 + 1$ polinomioaren hurbilketarik onena S-en. (**2 puntu**)

[E] $S^\perp$ azpiespazioaren $B_{S^\perp}$ oinarri bat barnean duen $\mathbb{P}_3(x)$ espazio bektorialaren oinarri bat lortu. (**3 puntu**)

ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN ARIKETA

euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco
INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

3. ORRIA

Izan bedi hurrengo ezezagunen koefizienteen matrize zabalduak zehazten duen ekuazio linealetako sistema ez homogeneoa:

$$AM=\begin{pmatrix} \xi & 2\xi & 2 & 2 \\ \xi+2 & 2(\xi+1) & \xi & 0 \\ 1 & \xi+1 & 1 & 1 \\ \xi & \xi & \xi & \xi \end{pmatrix}$$

[A] $|AM|$ kalkulatu. (**2 puntu**)

[B] Sistema era bektorialean adierazi. (**puntu 1**)

[C] Sailkatu, arrazoituz, emandako sistema $\xi\in\mathbb{R}$ parametroaren balio desberdinen arabera. (**2 puntu**)

[D] Gauss-Jordan metodoa erabiliz, sistema bateragarria den kasuetan ebatzi. (**2.5 puntu**)

[E] $F \triangleq \{\vec{u}_1=(1,3,1,1),\vec{u}_2=(2,4,2,1),\vec{u}_3=(2,1,1,1)\}\subset\mathbb{R}^4$ azpiespazio bektorialarekiko $\vec{t}=(2,0,1,1)\in\mathbb{R}^4$ bektoreak duen distantzia minimo bat kalkulatu.

Oharra: ohiko biderkadura eskalarra erabili. (**2.5 puntu**)

```
In[17]:= MG = Table[f[[i]].f[[j]], {i, 3}, {j, 3}]
Out[17]= {{12, 17, 7}, {17, 25, 11}, {7, 11, 7}}
In[18]:= FO = Orthogonalize[f]
```

$$\text{Out[18]= }\left\{\left\{\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right\},\left\{\frac{7}{2\sqrt{33}},-\frac{\sqrt{\frac{3}{11}}}{2},\frac{7}{2\sqrt{33}},-\frac{5}{2\sqrt{33}}\right\},\left\{\frac{4\sqrt{\frac{2}{11}}}{3},-\frac{5}{3\sqrt{22}},-\frac{1}{\sqrt{22}},\frac{5\sqrt{\frac{2}{11}}}{3}\right\}\right\}$$

```
In[19]:= v = {2, 0, 1, 1}; pv = Sum[Projection[v, FO[[i]]], {i, 3}] // FullSimplify
```

$$\text{Out[19]= }\left\{\frac{19}{9},\frac{1}{18},\frac{5}{6},\frac{8}{9}\right\}$$

```
In[20]:= j = Dot[pv - v, pv - v]
```

$$\text{Out[20]= }\frac{1}{18}$$

```
In[21]:= incognitas = {l, m, n}; sistema = (Transpose[f].incognitas == pv) // FullSimplify;
Xa = Solve[sistema, {l, m, n}]
```

$$\text{Out[22]= }\left\{\left\{l\to-\frac{1}{3},\ m\to-\frac{1}{18},\ n\to\frac{23}{18}\right\}\right\}$$

```
In[23]:= f
Out[23]= {{1, 3, 1, 1}, {2, 4, 2, 1}, {2, 1, 1, 1}}
```

4. ORRIA

Izan bedi honako matrize erreala: $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

[A] B matrizearen polinomio karakteristikoa lortu. (**puntu 1**)

[B] B-ren balio propioak eta azpiespazio propioak kalkulatu. (**2.5 puntu**)

[C] B matrizea antzekotasunez diagonalizagarria al da? Arrazoitu erantzuna, eta baiezkoa bada, adierazitako diagonalizazioa egin. (**2.5 puntu**)

[D] B matrizea antzekotasunez ortogonalki diagonalizagarria al da? Arrazoitu erantzuna, eta baiezkoa bada, adierazitako diagonalizazioa egin. (**puntu 1**)

[E] B eta dagokion D matrize diagonalaren arteko antzekotasun erlazioa erabiliz, B^2 kalkulatu. (**1.5 puntu**)

[F] B matrizearen alderantzizkoa lortu Cayley–Hamilton-en teorema erabiliz. (**1.5 puntu**)

Noten argitalpena: 2014ko uztailak 14, 11:00etan
Ariketen berrikuspena: 2014ko uztailak 17, 10:00etan (7. solairuan, 7I1 Laborategian)