ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

2013–2014 ikasturtea. Bigarren deialdia

1. ORRIA

[A] Izan bedi $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrize antisimetrikoa. A^n antisimetrikoa al da? Arrazoitu erantzuna. (**2.5 puntu**)

A matrizea antisimetrikoa bada, orduan, $A^t = -A$.

$$\left(A^n\right)^t = \underbrace{\left(A\cdot A\cdot A\cdot\ \cdots\ \cdot A\right)^t}_{n\ aldiz} = \underbrace{A^t\cdot A^t\cdots\ \cdot A^t}_{n\ aldiz} = \underbrace{(-A)\cdot(-A)\cdot\ \cdots\ \cdot(-A)}_{n\ aldiz} = (-1)^n\cdot A^n$$

Beraz:

- **n bikoitia bada**: $\left(A^n\right)^t = A^n \Rightarrow A^n$ **simetrikoa** da
- **n bakoitia bada**: $\left(A^n\right)^t = -A^n \Rightarrow A^n$ **antisimetrikoa** da

---

[B] $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ izanik, $\sum_{n=1}^{24} A^n$ kalkulatu (**2.5 puntu**)

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ izanik eta 2. ordenako identitate matrizea $\boldsymbol{I}$ izendatuz:

- $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$
- $A^3 = A^2\cdot A = -I\cdot A = -A$
- $A^4 = A^2\cdot A^2 = (-I)\cdot(-I) = I$

Bosgarren berreturaren ondoren lortutako balioak errepikatzen dira:

- $A^5 = A^4\cdot A = I\cdot A = A$
- $A^6 = A^5\cdot A = A\cdot A = A^2 = -I$
- $A^7 = A^6\cdot A = -I\cdot A = -A$
- $A^8 = A^7\cdot A = -A\cdot A = -A^2 = I$

Beraz: $$\sum_{n=1}^{24} A^n = \underbrace{A + A^2 + A^3 + A^4}_{A-I-A+I} + \cdots + A^{24} = 6\left(A - I - A + I\right) = 6\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{24} A^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

Hurrengo galderen ebazpenerako *Mathematica* programako ondoko kodea ematen da:

```
In[1]:= s = {p1[x_] = x^2 - 2, p2[x_] = x^2 + x + 1, p3[x_] = 3 x^2 + 2 x, p4[x_] = 2 x^2 - x - 7};

In[2]:= m1 = Table[CoefficientList[s[[j]], x], {j, 1, Length[s]}];

In[3]:= m2 = RowReduce[m1]

Out[3]= {{1, 0, -1/2}, {0, 1, 3/2}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

Izan bedi honako polinomioen sistema:

$$S=\{\, p_1(x)=x^2-2,\ p_2(x)=x^2+x+1,\ p_3(x)=3x^2+2x,\ p_4(x)=2x^2-x-7\} \subset \mathbb{P}_3(x)$$

[C] $S\subset \mathbb{P}_3(x)$ sistemako polinomioen koefizienteak errenkadaka dituen M matrizearen heina kalkulatu. (**puntu 1**)

Emandako *Mathematica* programako komandoa begiratuz hurrengoa dugu:

- `m1` aldagaia matrize bat da, S sistemako polinomioak $\mathbb{P}_2(x)$-koak direla kontsideratuz polinomio hauen koefizienteak errenkadaka dituen matrizea, hain zuzen.
- `m2` aldagaiak errenkadaka `m1` matrizearen baliokidea den matrize bat adierazten du, non $h(m2)=2=h(m1)$ betetzen den.
- $S\subset \mathbb{P}_3(\mathrm{x})$ denez, eskatutako M matrizea `m1` aldagaian definitutako matrizeari zutabe nulu bat (x^3-ren koefizienteei dagokiena) gehituz lortzen da; beraz, $\boxed{rg(M)=2=rg(\mathtt{m1})}$ dela ondorioztatzen da.

Ariketa *Mathematica* programako komandoa erabili gabe ebatziz:

$$M=\begin{pmatrix}0&1&0&-2\\0&1&1&1\\0&3&2&0\\0&2&-1&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\1&1&1&0\\3&2&0&0\\2&-1&-7&0\end{pmatrix}\underbrace{\sim}_{\substack{E_{21}(-1)\\E_{31}(-3)\\E_{41}(-2)}}\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&3&0\\0&2&6&0\\0&-1&-3&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\underbrace{\sim}_{\substack{E_{42}(1)\\E_{32}(-2)}}\begin{pmatrix}1&0&-2&0\\0&1&3&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&0&-2\\0&0&1&3\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=C$$

Ondorioz: $\boxed{M\sim C\Rightarrow h(M)=h(C)=2}$.

[D] $V=L(S)$ azpiespazio bektorialaren bi oinarri desberdin, B_1 eta B_2 adierazi. Lortu $q(x)=x^2-3x-11\in S$ polinomioaren koordenatuak aurreko oinarrietako batean eta $\mathbb{P}_3(x)$-ren beste edozein oinarritan. (**2 puntu**)

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea / universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

Aurreko atalean lortutako emaitzak begiratuz *V*-ren edozein oinarri bi bektorez osatua egongo dela ondoriozta daiteke. Hortaz, eskatutako oinarriak hurrengoak kontsideratuz lor daitezke:

- Emandako *S* sistemako bi bektore aske: $\boxed{B_1=\left\{x^2-2\,,\,x^2+x+1\right\}}$
- *C* matrizeko bi errenkada ez nuluak: $\boxed{B_2=\left\{x^2-2\,,\,x+3\right\}}$

Mathematica programako komandoa erabiliz beste oinarri bat lor daiteke:

- `m2` matrizearen bi errenkada ez nuluak erabiliz: $\boxed{B_3=\left\{-\dfrac{1}{2}x^2+1,\,\dfrac{3}{2}x^2+x\right\}}$

$q(x)=x^2-3x-11\in S$ bektorearen koordenatuak *S* azpiespazioko B_1 eta B_2 oinarrietan eta $\mathbb{P}_3(x)$ espazio bektorialeko oinarri kanonikoan:

- <u>B_1-ekiko koordenatuak</u>: $\boxed{q(x)=(4,-3)_{B_1}}$

$$q(x)=x^2-3x-11=\alpha\left(x^2-2\right)+\beta\left(x^2+x+1\right)\Rightarrow\begin{cases}1=\alpha+\beta\\-3=\beta\\-11=-2\alpha+\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=4\\\beta=-3\end{cases}$$

- <u>B_2-rekiko koordenatuak</u>: $\boxed{q(x)=(1,-3)_{B_1}}$

$$q(x)=x^2-3x-11=\alpha\left(x^2-2\right)+\beta\left(x+3\right)\Rightarrow\begin{cases}1=\alpha\\-3=\beta\\-11=-2\alpha+3\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=-3\end{cases}$$

- $\boxed{B=\left\{x^3\,,\,x^2,x,1\right\}}$<u>-rekiko koordenatuak</u>: $\boxed{q(x)=(0,1,-3,-11)_B}$

[E] Baldin $p(x)\in\mathbb{P}_3(x)$ betetzen bada, $p(x)\in V$ betetzeko baldintza adierazi. (**2 puntu**)

Izan bedi $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d\in\mathbb{P}_3(x)$ polinomioa. $p(x)\in V$ betetzeko, $p(x)$ polinomioa *V* azpiespazioaren edozein oinarriko bektoreen konbinazio lineal gisa idaztea posible izan behar da.

$p(x)\in V$ bektore orokorraren eta *V*–ko edozein oinarri, B_1 oinarria adibidez, osatzen duten polinomioen koefizienteak matrize baten zutabeka jarriz ondorengoa daukagu:

eman ta zabal zazu

euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

$$h\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ -2 & 1 & d \end{pmatrix} = 2$$

Kasu honetan bi ekuazio ditugu,

$$\boxed{V\text{-ko ekuazio libre kopurua} = \dim \mathbb{P}_3(x) - \dim V = 2} \text{ delako}$$

- Lehenengo ekuazioa: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a = 0$
- Bigarren ekuazioa: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ -2 & 1 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 3 & d+2b \end{vmatrix} = d + 2b - 3c = 0$

Beraz: $\boxed{V = \left\{ p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3(x) \ / \ a = 0 \wedge d = 3c - 2b \right\}}$

Edota: $\boxed{V = \left\{ p(x) = bx^2 + cx + 3c - 2b \in \mathbb{P}_3(x) \ / \ c, b \in \mathbb{R} \right\}}$

Beste era batera: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = \alpha\left(x^2 - 2\right) + \beta(x+3) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \alpha \\ c = \beta \\ d = 3\beta - 2\alpha \end{cases}$

$$\boxed{V = \left\{ p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{P}_3(x) \ / \ a = 0 \wedge d = 3c - 2b \right\}}$$

---

2. ORRIA

$\left(\mathbb{P}_3(x), <,>\right)$ espazio bektorial euklidearrean, ohiko biderkadura eskalarra erabiliz, izan bitez ondorengo azpiespazioak:

$$S = \left\{ p(x) \in \mathbb{P}_3(x) / \ p(x) \perp \left(x^2 + 1\right) \wedge p(x) \perp (x - 1) \right\}$$

$$T = \left\{ p(x) \in \mathbb{P}_3(x) / \ p''(0) = 0, \ p'(1) = -p'(1) \right\} \subset \mathbb{P}_3(x)$$

[A] S-ren B_S oinarri bat lortu eta bere dimentsioa adierazi. (**2 puntu**)

Azpiespazioko polinomio orokor bat kontsideratuz:

$$\forall p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \in S \subset \mathbb{P}_3(x)$$

- $p(x) \perp (x^2 + 1) \Leftrightarrow \left\langle p(x), \ x^2 + 1 \right\rangle = 0$

$$\langle p(x),\ x^2+1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d,\ x^2+1\rangle = b+d=0$$

- $p(x)\perp(x-1)\Leftrightarrow\langle p(x),\ x-1\rangle=0$

$$\langle p(x),\ x-1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d,\ x-1\rangle = c-d=0$$

Hau da, $p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$ S-ren barnean dagoen edozein polinomioren koefizienteek hurrengo baldintzak bete behar dituzte:

$$\left.\begin{array}{l} b+d=0 \\ c-d=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-d \\ c=d \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{S=\left\{p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d\in\mathbb{P}_3(x)\,/\,b=-d\wedge c=d\right\}}$$

S-ren barnean dauden polinomioen adierazpen orokorra ondorengoa da:

$$p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=a\cdot x^3-d\cdot x^2+d\cdot x+d=a\cdot x^3+d(-x^2+x+1)\Rightarrow$$

$$\boxed{S=\mathcal{L}\left(\left\{x^3,-x^2+x+1\right\}\right)}$$

Honetaz gain, sistema sortzailea osatzen duten bi bektoreak linealki independenteak direnez:

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=2\Rightarrow \boxed{B_S=\left\{x^3,-x^2+x+1\right\}} \Rightarrow \boxed{\dim S=2}$$

[B] $S\cap T$ kalkulatu eta posible bada, oinarri bat eta bere dimentsioa adierazi.(**2 puntu**)

Azpiespazioko polinomio orokor bat kontsideratuz:

$$\forall p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d\in S\cap T\Rightarrow p(x)\in S\wedge p(x)\in T$$

$\boxed{p(x)\in T}$ dagoenez:

$$p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} p'(x)=3a\cdot x^2+2b\cdot x+c \\ p''(x)=6a\cdot x+2b \end{array}\right.$$

- $p'(1)=-p'(1)\Rightarrow 3a+2b+c=-(3a+2b+c)\Rightarrow c=-(3a+2b)$
- $p''(x)=6a\cdot x+2b\Rightarrow p''(0)=0\Rightarrow b=0$

$$\boxed{T=\left\{p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d\in\mathbb{P}_3(x)\,/\,b=0\wedge c=-3a\right\}}$$

$$\boxed{T=\left\{p(x)=a\cdot x^3-3a\cdot x+d\in\mathbb{P}_3(x)\,/\,a,d\in\mathbb{R}\right\}}\Rightarrow B_T=\left\{x^3-3x,1\right\}$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

$\boxed{p(x)\in S}$ dagoenez: $\boxed{S=\left\{p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d\in \mathbb{P}_3(x)\,/\,b=-d\wedge c=d\right\}}$

Beraz:

$$\left.\begin{array}{l} p(x)\in S\Rightarrow b=-d\wedge d=c \\ p(x)\in T\Rightarrow b=0\wedge c=-3a \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{array}\right\}\Rightarrow p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=0$$

Hau da: $\boxed{S\cap T=\{0\}}$ $\Rightarrow \dim(S\cap T)=0\Rightarrow \nexists\ oinarria\left(v(x)=0\ ez\ da\ sortzailea\right)$

[C] $S+T$ kalkulatu eta batura zuzena den arrazoitu. (**1 puntu**)

$$\dim\,(S+T)=\dim S+\dim\,T-\underbrace{\dim\,(S\cap T)}_{0}=4$$

$$\left.\begin{array}{l} S+T\subseteq \mathbb{P}_3(x) \\ \dim(S+T)=\dim\,\mathbb{P}_3(x) \end{array}\right\}\Rightarrow S+T=\mathbb{P}_3(x)$$

Bi azpiespazio bektorialen baturak $\mathbb{P}_3(x)$ espazio bektorial osoa sortzen du, eta gainera $S\cap T=\{0\}$, beraz, **batura zuzena** da, hau da:

$$\boxed{S\oplus T=\mathbb{P}_3(x)}$$

[D] Lortu $r(x)=x^3+x^2+1$ polinomioaren hurbilketarik onena S-en. (**2 puntu**)

Edozein polinomiok S-en duen hurbilketarik onena lortzeko S azpiespazio bektorialaren oinarri ortogonal bat lortu behar da.

Lehenengo atalean lortutako B_S oinarria ortogonala da, ondorengoa betetzen baita:

$$\left\langle x^3,-x^2+x+1\right\rangle=0\Rightarrow B_S=\left\{x^3,-x^2+x+1\right\}$$

$$\overline{r}(x)=proy_S\ r(x)=\frac{\left\langle r(x),\,x^3\right\rangle}{\left\|x^3\right\|^2}\cdot x^3+\frac{\left\langle r(x),\,-x^2+x+1\right\rangle}{\left\|\left(-x^2+x+1\right)\right\|^2}\cdot\left(-x^2+x+1\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left\langle r(x),\,x^3\right\rangle=\left\langle x^3+x^2+1,\,x^3\right\rangle=1 \\ \left\langle r(x),\,-x^2+x+1\right\rangle=\left\langle x^3+x^2+1,\,-x^2+x+1\right\rangle=0 \\ \left\|x^3\right\|^2=\left\langle x^3,\,x^3\right\rangle=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{\overline{r}(x)=proy_S\ r(x)=x^3}$$

eman ta zabal zazu

euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

[E] $S^{\perp}$ azpiespazioaren $B_{S^{\perp}}$ oinarri bat barnean duen $\mathbb{P}_3(x)$ espazio bektorialaren oinarri bat lortu. (**3 puntu**)

$$S^{\perp}=\left\{p(x)\in\mathbb{P}_3(\mathrm{x})\,/\,p(x)\perp B_S\right\}=\left\{p(x)\in\mathbb{P}_3(\mathrm{x})\,/\,p(x)\perp x^3\wedge p(x)\perp\left(-x^2+x+1\right)\right\}$$

$$p(x)\in\mathbb{P}_3(\mathrm{x})\Rightarrow p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d$$

- $p(x)\perp x^3\Rightarrow\left\langle p(x),x^3\right\rangle=0\Rightarrow\left\langle a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d\,,x^3\right\rangle=a=0$
- $p(x)\perp -x^2+x+1\Rightarrow\left\langle p(x),-x^2+x+1\right\rangle=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left\langle a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d\,,-x^2+x+1\right\rangle=-b+c+d=0$$

Beraz, ondokoa ondoriozta daiteke:

$$\forall p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d\in S^{\perp}:\qquad \left.\begin{array}{l}a=0\\ d=b-c\end{array}\right\}$$

$$p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d=b\cdot x^2+c\cdot x+(b-c)=b\cdot(x^2+1)+c\cdot(x-1)$$

Hau da: $\boxed{S^{\perp}=\mathcal{L}\left(\left\{x^2+1,\,x-1\right\}\right)}$

Hortaz gain, sistema sortzailea osatzen duten bi polinomioak linealki independenteak direnez:

$$h\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\\1&0\\0&0\end{pmatrix}=2\Rightarrow\boxed{B_{S^{\perp}}=\left\{x^2+1,x-1\right\}}$$

Lortu berri den oinarria enuntziatuan emandako S azpiespazioaren definiziotik ere ondoriozta daiteke.

S azpiespazio bektoriala eta bere azpiespazio ortogonala $\left(S^{\perp}\right)$ osagarriak dira, hau da, $S\oplus S^{\perp}\cong\mathbb{P}_3(\mathrm{x})$. Beraz, $S\oplus S^{\perp}=\mathbb{P}_3(x)$-ko oinarri bat sortzeko bi azpiespazio bektorialen oinarriak (B_S eta $B_{S^{\perp}}$) elkar daitezke:

$$\boxed{B_{\mathbb{P}_3(x)}=\left\{x^3,-x^2+x+1,\;x^2+1,\,x-1\right\}}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA E.U.I.T.I. BILBAO — U.P.V. E.H.U. — BILBOKO I.I.T.U.E. MATEMATIKA APLIKATUAREN SAILA

3. ORRIA

Izan bedi hurrengo ezezagunen koefizienteen matrize zabalduak zehazten duen ekuazio linealetako sistema ez homogeneoa:

$$AM=\begin{pmatrix} \xi & 2\xi & 2 & 2 \\ \xi+2 & 2(\xi+1) & \xi & 0 \\ 1 & \xi+1 & 1 & 1 \\ \xi & \xi & \xi & \xi \end{pmatrix}$$

[A] Kalkulatu $|AM|$. (**2 puntu**)

$$|AM|=\begin{vmatrix} \xi & 2\xi & 2 & 2 \\ \xi+2 & 2(\xi+1) & \xi & 0 \\ 1 & \xi+1 & 1 & 1 \\ \xi & \xi & \xi & \xi \end{vmatrix}=\xi\begin{vmatrix} \xi & 2\xi & 2 & 2 \\ \xi+2 & 2(\xi+1) & \xi & 0 \\ 1 & \xi+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$\underset{C_i\leftarrow C_i-C_4,\, i=[1,3]}{=}\xi\begin{vmatrix} \xi-2 & 2(\xi-1) & 0 & 2 \\ \xi+2 & 2(\xi+1) & \xi & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix}=\xi\begin{vmatrix} \xi-2 & 2(\xi-1) & 0 \\ \xi+2 & 2(\xi+1) & \xi \\ 0 & \boxed{\xi} & 0 \end{vmatrix}=-\xi^3\begin{vmatrix} \xi-2 & 0 \\ \xi+2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{|AM|=-\xi^3(\xi-2)}$$

[B] Adierazi sistema era bektorialean. (**puntu 1**)

Emandako sistema S bezala izendatuz:

$$\boxed{S=\sum_{i=1}^{i=3}\vec{a}_i'x_i=\vec{b} \quad / \quad \begin{cases} \vec{a}_1'=(\xi,\xi+2,1,\xi)\in\mathbb{R}^4 \\ \vec{a}_2'=(2\xi,2(\xi+1),\xi+1,\xi)\in\mathbb{R}^4 \\ \vec{a}_3'=(2,\xi,1,\xi)\in\mathbb{R}^4 \\ \vec{b}=(2,0,1,\xi)\in\mathbb{R}^4 \end{cases}}$$

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA - E.U.I.T.I. BILBAO - U.P.V. E.H.U. - MATEMATIKA APLIKATUAREN SAILA - BILBOKO I.I.T.U.E.

[C] Sailkatu, arrazoituz, emandako sistema $\xi\in\mathbb{R}$ parametroaren balio desberdinen arabera. (**2 puntu**)

Rouché-Frobenious-en teorema erabiliz ekuazio linealetako sistemaren sailkapena heinen azterketan bilakatzen da. Kasu honetan, AM matrizea karratua denez komenigarriena $|AM|=-\xi^3(\xi-2)$ determinantea kalkulatuz hastea da, ondoren, determinante hau abiapuntu bezala harturik aztertu beharreko kasuak garatuz.

eman ta zabal zazu

euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

S sistemaren koefizienteen matrizea A izendatzen badugu, aztertu beharreko kasuak ondokoak dira:

- **1. KASUA** $\left(\forall \xi \in \mathbb{R}-\{0,2\}\right)$. Nabaria da $|AM| \neq 0$ dela $\Rightarrow h(AM)=4>h(A)$. Kasu honetan **sistema bateraezina** da.

- **2. KASUA** $(\xi=0)$. S sistema **bateragarri indeterminatua** da, hurrengoa betetzen baita:

$$AM\big|_{\xi=0}=\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{matrix}} & 2 \\ 2 & & 0 \\ 1 & 1 \quad 1 & 1 \\ 0 & 0 \quad 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow h(AM)=h(A)=2<n=3$$

- **3. KASUA** $(\xi=2)$. Kasu honetako matrizeak aztertuz:

$$AM\big|_{\xi=2}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \text{ non } |A_1|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \underset{\substack{E_1\leftarrow E_1-E_3 \\ E_2\leftarrow E_2-E_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & \boxed{2} & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

Beraz $r(AM)=3=r(A)=n$, ondorioz, **sistema bateragarri determinatua** da.

[D] Sistema bateragarria den kasuetan ebatzi Gauss-Jordan metodoa erabiliz. (**2.5 puntu**)

- **2. KASUA** $(\xi=0)$. Kasu honetan:

$$AM\big|_{\xi=0}=\begin{pmatrix} 0 & \boxed{\begin{matrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{matrix}} & 2 \\ 2 & & 0 \\ 1 & 1 \quad 1 & 1 \\ 0 & 0 \quad 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2x \end{array}\right) \underset{E_i\leftarrow \frac{1}{2}E_i,\, i=1,2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{array}\right) \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} z=1 \\ y=-x \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}}$$

- **3. KASUA** $(\xi=2)$. Kasu honetako matrizeak aztertuz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{E_i\leftarrow \frac{1}{2}E_i,\,\forall i}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{E_2\leftarrow E_2-2E_1 \\ E_3\leftarrow E_3-E_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\substack{E_1\leftarrow E_1+E_2+E_3\\ E_3\leftarrow -E_3\\ E_2\leftarrow E_2+E_3\\ E_2\leftarrow -E_2}}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&0&1&2\\0&1&0&0\end{array}\right)\underset{E_2\leftrightarrow E_3}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&2\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c}\mathbb{I}_3&\begin{matrix}-1\\0\\2\end{matrix}\end{array}\right)\Leftrightarrow\boxed{\begin{cases}x=-1\\y=0\\z=2\end{cases}}$$

Ariketa honetako azken zatia egiteko enuntziatuan proposatzen den ondorengo *Mathematica* programako komandoa erabiliko da:

```
In[17]:= MG = Table[f[[i]].f[[j]], {i, 3}, {j, 3}]
Out[17]= {{12, 17, 7}, {17, 25, 11}, {7, 11, 7}}

In[18]:= FO = Orthogonalize[f]
Out[18]= {{1/(2 Sqrt[3]), Sqrt[3]/2, 1/(2 Sqrt[3]), 1/(2 Sqrt[3])},
  {7/(2 Sqrt[33]), -Sqrt[3/11]/2, 7/(2 Sqrt[33]), -5/(2 Sqrt[33])}, {4 Sqrt[2/11]/3, -5/(3 Sqrt[22]), -1/Sqrt[22], 5 Sqrt[2/11]/3}}

In[19]:= v = {2, 0, 1, 1}; pv = Sum[Projection[v, FO[[i]]], {i, 3}] // FullSimplify
Out[19]= {19/9, 1/18, 5/6, 8/9}

In[20]:= j = Dot[pv - v, pv - v]
Out[20]= 1/18

In[21]:= incognitas = {l, m, n}; sistema = (Transpose[f].incognitas == pv) // FullSimplify;
         Xa = Solve[sistema, {l, m, n}]
Out[22]= {{l -> -1/3, m -> -1/18, n -> 23/18}}

In[23]:= f
Out[23]= {{1, 3, 1, 1}, {2, 4, 2, 1}, {2, 1, 1, 1}}
```

[E] $F \triangleq \{\vec{u}_1=(1,3,1,1),\vec{u}_2=(2,4,2,1),\vec{u}_3=(2,1,1,1)\}\subset\mathbb{R}^4$ azpiespazio bektorialarekiko $\vec{t}=(2,0,1,1)\in\mathbb{R}^4$ bektoreak duen distantzia minimo bat kalkulatu.
Oharra: ohiko biderkadura eskalarra erabili. (**2.5 puntu**)

Atal hau ebazteko espazio bektorial euklidearretako hurbilketa teoria erabiliko dugu, emaitza bakarra bermatzen duena.

$\boxed{\xi=1}$ denez, **sistema bateraezina** (1 kasua) da.

Hau da, $\vec{t}=(2,0,1,1)\notin\mathcal{L}(F)$ F honako bektoreek definitzen duten sistema izanik:

$$F \triangleq \{\vec{u}_1=(1,3,1,1),\vec{u}_2=(2,4,2,1),\vec{u}_3=(2,1,1,1)\}\subset\mathbb{R}^4 .$$

Hemendik aurrera minimo karratuen metodoa aplikatuz sistema bateraezin baten soluzio hurbildua lortzeko prozedura aplikatuko dugu:

AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

- **1. Urratsa.**

Independentzia linealaren teoremaren arabera: $h(F) = h(M) = 3$, izan ere:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{eta} \qquad |M_1| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Ondorioz, F sistema askea da, baina ez da sistema ortogonala lan egiten ari garen $\mathbb{R}^4$ espazio bektorial euklidearreko ohiko biderkadura eskalarrerako:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{i=4} x_i \cdot y_i \ / \ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4),\ \vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$$

Izan ere, `Out[17]`-an ikus daiteken bezalaxe biderkadura eskalarrari elkartutako Gram-en matrizea diagonala ez baita. (**`MG` aldagaian** Gram-en matrizea kalkulatzen da.)

$$G \triangleq M\left(\langle \cdot, \cdot \rangle, F\right) = \begin{pmatrix} 12 & 17 & 7 \\ 17 & 25 & 11 \\ 7 & 11 & 7 \end{pmatrix}$$

Gram matrizea matrize karratu, simetriko, erregular, alderantzikagarria eta positiboki definitua, hau da, bere balio propio guztiak errealak eta positiboak direla gogoratzen da.

- **2. Urratsa.**

(a) Gram–Schmidt-en ortogonalizazio metodoa aplikatuz, F sistema askea abiapuntu bezala harturik bektore sistema ortogonal bat eraikitzen da:

$$B_{ORTOG} = \{\vec{v}_i\}_{1 \le i \le 3} \ / \ \mathcal{L}(B_{ORTOG}) = \mathcal{L}(F)$$

- $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 = \ldots; \quad \|\vec{v}_1\|^2 = \ldots$
- $\vec{v}_2 = \vec{u}_2 - \dfrac{\langle \vec{u}_2, \vec{v}_1 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_1 = \ldots; \quad \|\vec{v}_2\|^2 = \ldots$
- $\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \sum_{i=1}^{i=2} \dfrac{\langle \vec{u}_3, \vec{v}_i \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2} \vec{v}_i = \ldots; \quad \|\vec{v}_3\|^2 = \ldots$

$\{\vec{u}_i\}$ bektoreak F sistemako bektoreen edozein permutazio posible izanik. Bektore hauen permutazio posible bat *Mathematica* programako kodean `In[23]`-n agertzen da (`f`-ren bektoreak dira).

AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

(b) Azkenik, B_{ORTOG} sistema ortonormalizatzen da:

$$B_{ORTON}=\left\{\vec{w}_i=\frac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|}\right\}_{1\le i\le 3} \;/\; \mathcal{L}(B_{ORTON})=\mathcal{L}(B_{ORTOG})=\mathcal{L}(B)$$

Mathematica programako **Orthogonalize[]** funtzioak sistema hau ematen du. Prozesu hau **In[18]** sarreran egiten da, emaitza **Out[18]** irteeran lortuz (**FO aldagaia** ikusi):

$$B_{ORTON}=\left\{\vec{w}_1=\left(\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right),\vec{w}_2=\left(\frac{7}{2\sqrt{33}},\frac{-\sqrt{\frac{3}{11}}}{2},\frac{7}{2\sqrt{33}},\frac{-5}{2\sqrt{33}}\right),\right.$$
$$\left.\vec{w}_3=\left(\frac{4\sqrt{\frac{2}{11}}}{3},\frac{-5}{3\sqrt{22}},\frac{-1}{\sqrt{22}},\frac{5\sqrt{\frac{2}{11}}}{3}\right)\right\}$$

- **<u>3. Urratsa</u>.**

$\vec{b}\in\mathbb{R}^4$ bektorea $\mathcal{L}(F)$ azpiespazio bektorialaren gainean ortogonalki proiektatzen da, proiekzio hau bakarra izanik, abiapuntu bezala sistema ortogonala hartu baita:

$$\vec{t}_p=proy_S\,\vec{t}=proy_{\mathcal{L}(B_{ORTOG})}\,\vec{t}=proy_{\mathcal{L}(B_{ORTON})}\,\vec{t}$$

Hurrengo Fourier-en baturaren bidez kalkulatzen da:

$$\boxed{\vec{t}_p=\sum_{i=1}^{i=3}\frac{\langle\vec{t},\vec{v}_i\rangle}{\|\vec{v}_i\|^2}\vec{v}_i=\sum_{i=1}^{i=3}\langle\vec{t},\vec{w}_i\rangle\vec{w}_i=\left(\frac{19}{9},\frac{1}{18},\frac{5}{6},\frac{8}{9}\right)}$$

Proiekzio ortogonala *Mathematica* programako komandoko **In[19]/Out[19]** sarrera-irteeran kalkulatzen da (**pv aldagaia** ikusi).

Hau da, $\vec{t}_p=proy_{\mathcal{L}(B_{ORTON})}\,\vec{t}$ bektorea $\vec{t}$ bektoretik hurbilen dagoen bektorea da, beraien arteko distantzia:

$$\|\vec{t}-\vec{t}_p\|=\sqrt{\langle\vec{t}-\vec{t}_p,\vec{t}-\vec{t}_p\rangle}=\sqrt{\frac{1}{18}}=0.2357\;unitate$$

izanik.

Mathematica programako **In[5]/Out[5]** sarrera-irteeran kalkulatzen da (**j aldagaia**).

AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

4. ORRIA

Izan bedi honako matrize erreala: $B=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$

[A] B matrizearen polinomio karakteristikoa lortu. (**puntu 1**)

$$p(\lambda)=|A-\lambda\cdot I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-3&3\\3&-5-\lambda&3\\6&-6&4-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow{z_3+z_2}\begin{vmatrix}1-\lambda&-3&0\\3&-5-\lambda&-2-\lambda\\6&-6&-2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-(2+\lambda)\cdot\begin{vmatrix}1-\lambda&-3&0\\3&-5-\lambda&1\\6&-6&1\end{vmatrix}\xrightarrow{e_3-e_2}-(2+\lambda)\cdot\begin{vmatrix}1-\lambda&-3&0\\3&-5-\lambda&1\\3&-1+\lambda&0\end{vmatrix}=$$

$$-(2+\lambda)\cdot1\cdot(-1)\begin{vmatrix}1-\lambda&-3\\3&-1+\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda+2)\left(\lambda^2-2\lambda-8\right)=-(\lambda+2)^2(\lambda-4)$$

$$\boxed{p(\lambda)=-(\lambda+2)^2(\lambda-4)}$$

[B] B-ren balio propioak eta azpiespazio propioak kalkulatu. (**2.5 puntu**)

Aurreko atalean lortutako polinomio karakteristikoarekin osatutako ekuazio karakteristikoa ebatziz balio propioak lortzen dira:

$$p(\lambda)=0\Rightarrow p(\lambda)=-(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\lambda_1=-2 & k_1=2\\ \lambda_2=4 & k_2=1\end{cases}}$$

Bektore propioak lortzeko balio propio bakoitzarentzat $\left(B-\lambda_i I_3\right)\vec{x}=[0]_{3\times3}$ sistema ebatziko dugu:

- $\boxed{\lambda_1=-2}$. Azpiespazio bektoriala: $V(-2)=\left\{\vec{x}\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\mathbb{R}^3\,/\,B\vec{x}=-2\vec{x}\right\}\subset\mathbb{R}^3$

  $\forall\vec{x}\left(x_1,x_2,x_3\right)\in V(-2)$:

$$\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1-3x_2+3x_3=-2x_1\\3x_1-5x_2+3x_3=-2x_2\\6x_1-6x_2+4x_3=-2x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2-x_3\\ \forall x_2,x_3\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\boxed{S(\lambda_1=-2)=V(-2)=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x_1=x_2-x_3\right\}=\mathcal{L}\left(\left\{(1,1,0),(-1,0,1)\right\}\right)}$$

- $\boxed{\lambda_2=4}$. Azpiespazio bektoriala: $V(4)=\left\{\vec{x}(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,/\, B\vec{x}=4\vec{x}\right\}\subset\mathbb{R}^3$

  $\forall\vec{x}(x_1,x_2,x_3)\in V(4)$:

$$\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1-3x_2+3x_3=4x_1\\3x_1-5x_2+3x_3=4x_2\\6x_1-6x_2+4x_3=4x_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=x_1\\x_3=2x_1\end{cases}\forall x_1\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{S(\lambda_2=4)=V(4)=\left\{\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x_3=2x_1\wedge x_1=x_2\right\}=\mathcal{L}\left(\left\{1,1,2\right\}\right)}$$

Beraz, mapa espektrala ondokoa da:

i	λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$	$d_i=\dim V(\lambda_i)$
1	-2	2	$V(-2)=\mathcal{L}\left(\left\{\bar{u}_1=(1,1,0),\bar{u}_2=(-1,0,1)\right\}\right)$	2
2	4	1	$V(4)=\mathcal{L}\left(\left\{\bar{u}_3=(1,1,2)\right\}\right)$	1

[C] *B* matrizea antzekotasunez diagonalizagarria al da? Arrazoitu erantzuna, eta baiezkoa bada, adierazitako diagonalizazioa egin. (**2.5 puntu**)

Aurreko atalean lortutako emaitzak kontutan izanik (taula begiratu), diagonalizazio baldintzak betetzen direla ikusten da, beraz, ***B*** matrizea **antzekotasunez diagonalizagarria da**.

Hau da, $\exists P\in\mathbb{M}_{3x3}(\mathbb{R})\,/\,D=P^{-1}\cdot B\cdot P$ matrize diagonala den. *B* matrizea diagonalizatzeko, lortutako balio propioetatik eta azpiespazio propioen oinarrietatik abiatuz *D* eta *P* matrizeak kalkulatzen dira.

Soluzio posible bat (*B*-ren diagonalizazioa) ondorengoa da:

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}\quad \text{non } D=P^{-1}\cdot B\cdot P}$$

non $B_1=\left\{\vec{u}_1=(1,1,0),\vec{u}_2=(-1,0,1),\vec{u}_3=(1,1,2)\right\}\subset\mathbb{R}^3$ bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$-ko oinarri bat den.

AZKEN ARIKETA
EBAZPENA

[D] B matrizea antzekotasunez ortogonalki diagonalizagarria al da? Arrazoitu erantzuna, eta baiezkoa bada, adierazitako diagonalizazioa egin. (**puntu 1**)

B matrizea **ez da antzekotasunez ortogonalki diagonalizagarria**, matrize **simetrikoa ez** delako.

[E] B eta dagokion D matrize diagonalaren arteko antzekotasun erlazioa erabiliz, B^2 kalkulatu. (**1.5 puntu**)

$$\begin{cases} B = P\cdot D\cdot P^{-1} \\ B^2 = P\cdot D^2\cdot P^{-1} \end{cases}$$ dela jakinda,

P matrizearen alderantzizko matrizea kalkulatzen da, errenkaden eragiketa elementalak erabiliz:

$$P = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_2-E_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_3-E_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_3/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{E_1+E_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \xrightarrow{E_1-E_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Aurreko antzekotasun erlazioa aplikatuz:

$$\boxed{B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 6 & -2 & 6 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix}}$$

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN ARIKETA

EBAZPENA

[F] B matrizearen alderantzizkoa lortu Cayley–Hamilton-en teorema erabiliz. (**1.5 puntu**)

———

B –ren polinomio karakteristikoa $p(\lambda) = -(\lambda+2)^2 \cdot (\lambda - 4) = 16 + 12\lambda - \lambda^3$ da.

Beraz, Cayley–Hamilton-en teoremaren arabera:

$$p(B) = 16 \cdot I_3 + 12 \cdot B - B^3 = O_{3\times 3}$$

$$12 \cdot B - B^3 = -16 \cdot I_3 \quad \Rightarrow \quad B \cdot \left(12 \cdot I_3 - B^2\right) = -16 \cdot I_3 \quad \Rightarrow B \cdot \underbrace{\left(-\frac{12 \cdot I_3 - B^2}{16}\right)}_{B^{-1}} = I_3$$

Orduan:

$$\boxed{B^{-1} = -\frac{12 \cdot I_3 - B^2}{16} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{7}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}$$

Noten argitalpena: 2014ko uztailak 14, 11:00tan
Ariketen berrikuspena: 2014ko uztailak 17, 10:00tan (7. solairuan, 7I1 Laborategian)