ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN AZTERKETA
EBAZPENA

eman ta zabal zazu

euskal herriko unibertsitatea

universidad del país vasco

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

2012–2013 ikasturtea. Lehen deialdia

1. ORRIA

[A] A eta B bi matrize simetriko badira, sinplifikatu honako adierazpen matriziala:

$$\left[A^T B+(A+B)A\right]^T-\left[\left((BA)^T+A^T\right)B\right]^T$$ (**2 puntu**)

$$\left[A^T B+(A+B)A\right]^T-\left[\left((BA)^T+A^T\right)B\right]^T \underset{\substack{(A+B)^T=A^T+B^T\\(AB)^T=B^TA^T}}{=} \left(A^TB\right)^T+\left[(A+B)A\right]^T-B^T\left[(BA)^T+A^T\right]^T=$$

$$\underset{\substack{(A+B)^T=A^T+B^T\\(AB)^T=B^TA^T}}{=} B^T\left(A^T\right)^T+A^T\left(A^T+B^T\right)-B^T\left(A+BA\right) \underset{\substack{C(A+B)=CA+CB\\(A^T)^T=A}}{=} \cancel{B^T A}+A^TA^T+A^TB^T-\cancel{B^T A}-B^TBA=$$

$$\underset{datua:\ A^T=A,\ B^T=B}{=} AA+AB-BBA \underset{A.A=A^2}{=} A^2+AB-B^2A$$

[B] Ondorioztatu, arrazoituz, honako bost matrize mota hauen heina maximoa, matrizeak karratuak eta n ordenakoak direla jakinda: **(1.)** ortogonala, **(2.)** idenpotentea, **(3.)** inbolutiboa, **(4.)** nilpotentea eta **(5.)** erregularra. (**2,5 puntu**)

Enuntziatuak dioen bezala, izan bedi n ordenako A matrize karratua; hau da, $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

A **matrizea ortogonala** bada:

$$A^{-1}=A^T \Leftrightarrow A.A^{-1}=\mathbb{I}_n: \left|A.A^{-1}\right|=\left|A.A^T\right|=|A|.\left|A^T\right|=|A|^2=\left|\mathbb{I}_n\right|=1\Leftrightarrow |A|=\pm 1$$

matrize ortogonala beti da erregularra (|A|≠0), beraz, edozein matrize ortogonalaren heina n izango da.

A **matrizea idenpotentea** bada:

$$A^2=A\Leftrightarrow \left|A^2\right|=|A|\Leftrightarrow |A|\left(|A|-1\right)=0\Rightarrow |A|=1\vee |A|=0$$

Beraz, matrize idenpotente baten heina gehienez n izango da.

A **matrizea inbolutiboa** bada:

$$A^2=\mathbb{I}_n\Leftrightarrow \left|A^2\right|=\left|\mathbb{I}_n\right|=1\Leftrightarrow |A|=\pm 1$$

matrize inbolutiboa beti da erregularra (|A|≠0), beraz, bere heina n izango da.

A **matrizea nilpotentea** bada, beti da singularra, beraz, bere heina gehienez jota (n – 1) izango da.

$$A^{p+1}=[0]_{n\times n}\Leftrightarrow \left|A^{p+1}\right|=|A|^{p+1}=0\Leftrightarrow |A|=0$$

A **matrizea erregularra** bada, bere determinantea ezberdin 0 da, beraz, bere heina n izango da.

[C] Eztabaidatu honako esaldiaren egiatasuna edo faltsutasuna: "*Hiru bektorez* $\left\{ \vec{u}, \vec{w}, \vec{z} \right\}$ *osatutako bektore multzoa sistema librea da baldin eta bektoreetako bakoitza ez bada beste bi bektoreekiko banaka proportzionala*". (**2 puntu**)

Esaldia faltsua da. Nahiz eta hiru bektore horiek proportzionalak ez izan (adibidez $\vec{u} \neq a\vec{w}$ eta $\vec{u} \neq b\vec{z}$) sistema lotua izango da beraien artean konbinazio lineala baldin badago $\vec{u} = a\vec{w} + b\vec{z}$.

[D] $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialean $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u} \in \mathbb{R}^3$ bektoreak hartu dira, halako moldez, non $\vec{u}$ ez den $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$-ren konbinazio lineala; $F = \left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u} \right\}$ izanik, arrazoitu honako adierazpenak:

[D.1] F sistema librea da. (**puntu 1**)

F sistema ez da inoiz librea izango. F lau bektorez osatutako sistema da eta $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, beraz, lau bektore horiek ezin dira inoiz beraien artean independenteak izan.

[D.2] F sistema lotua da. (**puntu 1**)

F sistema beti izango da lotua. F lau bektorez osatutako sistema da eta $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, beraz, lau bektore horien artean beti egongo da konbinazio linealen bat.

[D.3] F $\mathbb{R}^3$–ren sistema sortzailea da. (**1,5 puntu**)

F $\mathbb{R}^3$–ren sistema sortzailea izango da, baldin eta soilik baldin hiru bektore independente baditut. Badakit $\vec{u}$ ez dela beste hiruren konbinazio lineala, baina gerta daiteke $\vec{u}_2$ eta $\vec{u}_3$ $\vec{u}_1$-en menpe egotea, eta kasu honetan $\mathcal{L}\left(\left\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u} \right\}\right) = \mathcal{L}\left(\vec{u}_1, \vec{u}\right) \neq \mathbb{R}^3$.

---

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN AZTERKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

2. ORRIA

$S = \{ p(x) \in \mathbb{P}_3 \,/\, p(x) = p(-x) \ \ \forall x \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{P}_3$ azpimultzoa kontuan hartuta:

[A] Egiaztatu S $\mathbb{P}_3$–ren azpiespazio bektoriala dela, eta eman S-ren oinarri bat (B_S) eta dimentsioa. (**2 puntu**)

Izan bedi $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in S \subset \mathbb{P}_3$:

$$p(x) = p(-x) \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = -ax^3 + bx^2 - cx + d \Leftrightarrow 2ax^3 + 2cx = 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge c = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

S $\mathbb{P}_3$-ren azpiespazio bektoriala izateko honako hau bete beharko da:

$$\forall p(x), q(x) \in S \wedge \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow z(x) = \alpha_1 p(x) + \alpha_2 q(x) \in S$$

$$p(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 \,/\, a_1 = 0 \ \wedge \ c_1 = 0$$
$$q(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \,/\, a_2 = 0 \ \wedge \ c_2 = 0$$
$$z(x) = \alpha_1 p(x) + \alpha_2 q(x) = \alpha_1\left[a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1\right] + \alpha_2\left[a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2\right] =$$
$$= \left(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2\right)x^3 + \left(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2\right)x^2 + \left(\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2\right)x + \left(\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2\right)$$

Bi polinomio horien konbinazio lineala barne S egoteko, bi baldintza bete behar ditu ($a = 0 \wedge c = 0$):

1) $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0 \quad \rightarrow$ bete egiten da $a_1 = 0 \ \wedge \ a_2 = 0$ direlako
2) $\alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 = 0 \quad \rightarrow$ bete egiten da $c_1 = 0 \ \wedge \ c_2 = 0$ direlako

$$z(x) = \underbrace{\left(\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2\right)}_{\in \mathbb{R}} x^2 + \underbrace{\left(\alpha_1 d_1 + \alpha_2 d_2\right)}_{\in \mathbb{R}} = h_1x^2 + h_2 \in S, \ \forall h_1, h_2 \in \mathbb{R}$$

Beraz, $p(x), q(x) \in S$ dauden bi polinomio hartzen baditut, beraien arteko konbinazio lineala $\alpha_1 p(x) + \alpha_2 q(x) \in S$ egongo da beti eta, horregatik, $\mathbb{P}_3$-ren azpiespazio bektoriala izango da.

$$S = \left\{ p(x) = bx^2 + d \in \mathbb{P}_3 \,/\, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b \cdot \{x^2\} + d \cdot \{1\} \,/\, b, d \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{ u_1(x) = x^2, u_2(x) = 1 \right\}\right)$$

Beraz, $\{ x^2, 1\}$ sistema S-ren sistema sortzailea da; eta librea denez, S-ren oinarria dugu, bere dimentsioa 2 izanik

$$B_S = \left\{ x^2, 1 \right\}$$

ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN AZTERKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

[B] Osatu B_S oinarria $\mathbb{P}_3$–ren B_1 oinarri bat lortu arte, non $q(x)=x^3+x^2-5$ polinomioaren koordenatuak $(1,0,1,-1)$ baitira. (**2 puntu**)

$B_S=\{u_1(x)=x^2, u_2(x)=1\}$ oinarrian bi polinomio daude, beraz, $\mathbb{P}_3$-ren oinarri bat izateko beste bi polinomio $G=\{r_1(x), r_2(x)\}$ gehitu beharko dira (dim $\mathbb{P}_3$=4 baita) non $B_1=\{u_1(x), u_2(x), r_1(x), r_2(x)\}$ multzo askea den. Bi polinomio horietako bat oinarri kanonikotik har dezakegu, adibidez $r_1(x)=x$. Bigarren polinomioa, $r_2(x)$, emandako baldintza betetzen duena izango da:

$$q(x)=1\times u_1(x)+0\times u_2(x)+1\times r_1(x)-1\times r_2(x)\Leftrightarrow$$
$$x^3+x^2-5=x^2+x-r_2(x)\Rightarrow r_2(x)=-x^3+x+5$$
$$B_1=\{u_1(x)=x^2, u_2(x)=1, r_1(x)=x, r_2(x)=-x^3+x+5\}$$

Nabaria da soluzio hau ez dela bakarra, hartutako $r_1(x)$ polinomioaren arabera enuntziatuak emandako baldintza beteko duen $r_2(x)$ polinomioa ezberdina izango baita.

[C] Lortu oinarria ez den S-ren sistema sortzaile bat. Adierazi $\mathbb{P}_3$–ren T azpimultzo bat $\mathbb{P}_3$–ren azpiespazio bektoriala ez dena. Arrazoitu erantzuna. (**3 puntu**)

S-ren sistema sortzailea eta aldi berean oinarria ez izateko **P sistema lotua** izan behar da:

$$S=\mathcal{L}(B_1)=\mathcal{L}(P)$$

Horretarako nahikoa da B_1 oinarriari linealki dependentea den bektore bat gehitzea. Adibidez: $P=\{u_1(x)=x^2, u_2(x)=1, u_3(x)=x^2+1\}\subset S$.

$\mathbb{P}_3$–ren azpiespazio bektoriala ez den T azpimultzo bat emateko, nahikoa da polinomio nulua edo aurkako polinomioa barne hartzen **ez** duen azpimultzo bat hartzea.

Adibide ezberdinak jarri ditzakegu, hala nola:

$T_1=\{ax^3+b \,/\, b=5\}\subset\mathbb{P}_3$ azpimultzo infinitua.

edo eta

$T_2=\{x^3+1, x^2+3x-2\}\subset\mathbb{P}_3$ azpimultzo finitua.

[D] $\mathbb{P}_3$–ren biderkadura eskalar ohikoa erabiliz, lortu $r(x) = x^3 + 1$ polinomioaren hurbilketarik onena *S*-n. (**3 puntu**)

Izan bedi $\mathcal{P}_3$ -ko ohiko biderkadura eskalarra:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$$
$$non\ p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ q(x) = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' \in \mathbb{P}_3$$

Argi ikusten da $\langle u_1(x), u_2(x) \rangle = \langle x^2, 1 \rangle = 0$ dela, beraz, B_S *S*-ren oinarri ortogonal bat da. $r(x) = x^3 + 1$ polinomioaren hurbilketarik onena *S*-n Fourier-en batura honek emango digu:

$$r'(x) = \text{proy}_S\ r(x) = \text{proy}_{\mathcal{L}(B_S)}\ r(x) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle r(x), u_i(x) \rangle}{\|u_i(x)\|^2} u_i(x)$$

Aurreko espresioa garatuz:

$$r'(x) = \frac{\langle x^3+1, x^2 \rangle}{\|x^2\|^2} x^2 + \frac{\langle x^3+1, 1 \rangle}{\|1\|^2} 1 = \frac{0}{1} x^2 + \frac{1}{1} 1 = 1$$

eman ta zabal zazu

euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN AZTERKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

3. ORRIA

Izan bedi honako matrize zabaldua duen S ekuazio linealezko sistema bat:

$$AM=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \Phi+1 & \Phi \\ 1 & -2 & 1 & \Psi \end{array}\right)$$

[A] Idatzi emandako sistema bere hiru adierazpen posibleetan. (**puntu 1**)

ADIERAZPEN OROKORRA

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 + (\Phi+1)x_3 = \Phi \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \Psi \end{cases}$$

ADIERAZPEN BEKTORIALA

$$\sum_{i=1}^{3} \overline{a}_i' x_i = \overline{b} \ / \ \begin{array}{l} \overline{a}_1'^T = (1,0,1,1) \in \mathbb{R}^4 \\ \overline{a}_2'^T = (-1,1,-1,-2) \in \mathbb{R}^4 \\ \overline{a}_3'^T = (1,0,\Phi+1,1) \in \mathbb{R}^4 \\ \overline{b}^T = (0,1,\Phi,\Psi) \in \mathbb{R}^4 \end{array}$$

ADIERAZPEN MATRIZIALA

$$AX=b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & \Phi+1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \Phi \\ \Psi \end{pmatrix}$$

eman ta zabal zazu

euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN AZTERKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

[B] Sailkatu emandako sistema $\Phi, \Psi \in \mathbb{R}$ parametroen arabera. (**3 puntu**)

Rouché-Frobenious-en teorema aplikatuz, ekuazio linealezko sistema baten eztabaida, heinen analisira murrizten da. Lehenengo eta behin, errenkadekiko eragiketa elementalak aplikatuko ditugu:

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \Phi+1 & \Phi \\ 1 & -2 & 1 & \Psi \end{pmatrix} \underset{\substack{e_3-e_1 \\ e_4-e_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \Phi & \Phi \\ 0 & -1 & 0 & \Psi \end{pmatrix} \underset{e_4-e_2}{\sim} B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \Phi & \Phi \\ 0 & 0 & 0 & \Psi+1 \end{pmatrix}$$

Ariketa honetan komenigarriena $|AM|$ kalkulatuz hastea litzateke, eta hortik abiatuz kasu posible guztiak aztertu:

$$|AM| = \Phi(\Psi+1)$$

1. KASUA $(\forall \Phi \in \mathbb{R}-\{0\} \wedge \forall \Psi \in \mathbb{R}-\{-1\})$: $r(AM)=4>r(A)=3$. Beraz, **SISTEMA BATERAEZINA** da.

2. KASUA $(\Phi = 0 \wedge \forall \Psi \in \mathbb{R}-\{-1\})$:

$$AM\big|_{\Phi=0} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \Psi \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 0 & \boxed{\Psi+1} \end{pmatrix} \Rightarrow r(AM)=r(B)=3 \neq r(A)=2 \Rightarrow$$

SISTEMA BATERAEZINA

3. KASUA $(\Psi = -1 \wedge \forall \Phi \in \mathbb{R}-\{0\})$: $r(AM)=r(A)=3=n$. Beraz, **SISTEMA BATERAGARRI DETERMINATUA** da.

$$AM\big|_{\Psi=-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & \Phi+1 & \Phi \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & \boxed{0} & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\Phi} & \Phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. KASUA $(\Phi = 0 \wedge \Psi = -1)$:

$$AM\big|_{\substack{\Phi=0 \\ \Psi=-1}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{r(A)=r(AM)=2<n=3,}$$

SISTEMA BATERAGARRI INDETERMINATUA

[C] Gauss–Jordan-en metodoa aplikatuz, S ebatzi $\Phi = 1$, $\Psi = -1$ balioetarako.(**3 puntu**)

$$AM\Big|_{\substack{\Phi=1\\ \Psi=-1}}=\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\1&-1&2&1\\1&-2&1&-1\end{array}\right)\sim B\Big|_{\substack{\Phi=1\\ \Psi=-1}}=\begin{pmatrix}1&-1&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underset{\substack{e_1-e_3\\ e_1+e_2}}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=1\\x_3=1\end{cases}$$

[D] Kalkulatu, posible bada, $\left(AM^{-1}\right)^T$ $\Phi=1,\Psi=1$ balioetarako. (**3 puntu**)

$\Phi\, eta\, \Psi$ -ren balio hauetarako $\left|AM_{\substack{\Phi=1\\ \Psi=1}}\right|=\Phi\left(\Psi+1\right)=2\neq 0$. Beraz, AM matrizea erregularra da, eta bere alderantzizkoa:

$$\left(AM_{\substack{\Phi=1\\ \Psi=1}}\Big|\mathbb{I}_4\right)=\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&0&\\0&1&0&1&\\\boxed{1}&-1&2&1&\mathbb{I}_4\\\boxed{1}&-2&1&1&\end{array}\right)\underset{e_i-e_1,i=3.4}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&-1&0&1&0\\0&\boxed{-1}&0&1&-1&0&0&1\end{array}\right)\underset{e_4+e_2}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&1&0&0\\0&0&1&1&-1&0&1&0\\0&0&0&\boxed{2}&-1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\frac{1}{2}e_4}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&\boxed{1}&0&1&0&0\\0&0&1&\boxed{1}&-1&0&1&0\\0&0&0&1&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\underset{e_i-e_4,i=2.3}{\sim}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&-1&1&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{-1}{2}\\0&0&1&0&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}&1&\frac{-1}{2}\\0&0&0&1&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&\boxed{-1}&\boxed{1}&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{-1}{2}\\0&0&1&0&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}&1&\frac{-1}{2}\\0&0&0&1&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\underset{e_1-e_3+e_2}{\sim}\left(\begin{array}{c|cccc}&2&1&-1&0\\&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{-1}{2}\\\mathbb{I}_4&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}&1&\frac{-1}{2}\\&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right)\Leftrightarrow AM^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}&1&\frac{-1}{2}\\\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Eskatutako matrizea $\left(AM^{-1}\right)^T$:

$$\left(AM^{-1}\right)^T=\begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}\\1&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&0&1&0\\0&\frac{-1}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

4. ORRIA

Izan bedi honako matrize erreala: $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

[A] Kalkulatu eta faktorizatu A matrizeari elkartutako polinomio karakteristikoa. (**2 puntu**)

$$p(\lambda_A) = \left|A - \lambda \mathbb{I}_3\right| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \underset{e_1 \to e_1 - e_2}{=} \begin{vmatrix} -6-\lambda & 6+\lambda & 0 \\ 1 & -5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\underset{z_2 \to z_2 - z_1}{=} \begin{vmatrix} \boxed{-6-\lambda} & 0 & 0 \\ 1 & -4-\lambda & 2 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+6) \begin{vmatrix} -4-\lambda & 2 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+6)^2$$

[B] A matrizea diagonalizagarria al da? Arrazoitu erantzuna. Erantzuna baiezkoa bada, eman bektore propioz osatutako $\mathbb{R}^3$ espazio bektorialaren oinarri bat. (**3 puntu**)

A matrizea diagonalizagarria da, erreala eta simetrikoa delako.

Polinomio karakteristikoaren erroak lortuz, matrizearen balio propioak lortuko dira:

$$\lambda_1 = 0, \quad k_1 = 1$$
$$\lambda_2 = -6, \quad k_2 = 2$$

Balio propio bakoitzeko $\left(A - \lambda \mathbb{I}_3\right) X = [0]_{3\times 3}$ ekuazio linealezko sistema homogeneoa ebatziz, balio propio bakoitzari elkartutako azpiespazio bektorialak lortuko dira.

- λ=0 denean

$$\left(A - 0 \cdot \mathbb{I}_3\right) X = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = y \\ z = 2y \end{matrix}$$

$S(0) = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \,/\, AX = [0]_{3\times 3} \right\} \subset \mathbb{R}^3$ azpiespazio bektorialaren ekuazio orokorra honakoa da: $S(0) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = y \wedge z = 2y \right\} = \left\{ (y,y,2y) \,/\, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathcal{L}\left(\left\{(1,1,2)\right\}\right)$

- λ = -6 denean

$$\left(A+6\mathbb{I}_3\right)X=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow x+y+2z=0$$

$S(-6)=\left\{X\in\mathbb{R}^3 / \left(A+6\mathbb{I}_3\right)X=[0]_{3\times 3}\right\}\subset\mathbb{R}^3$ azpiespazio bektorialaren ekuazio orokorra honakoa da:

$$S(-6)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=-y-2z\right\}=\left\{(-y-2z,y,z) / y,z\in\mathbb{R}\right\}=\mathcal{L}\left(\left\{(-1,1,0),(-2,0,1)\right\}\right)$$

A matrizearen mapa espektrala hauxe da:

i	λ_i	k_i	$V(\lambda_i)$	$d_i=\dim V(\lambda_i)$
1	0	1	$V(0)=\mathcal{L}\left(\left\{\bar{u}_1=(1,1,2)\right\}\right)$	1
2	-6	2	$V(-6)=\mathcal{L}\left(\left\{\bar{u}_2=(-2,0,1),\bar{u}_3=(-1,1,0)\right\}\right)$	2

Aurreko taula ikusten denez, diagonalizagarria izateko baldintzak betetzen dira (bagenekien, matrizea simetrikoa delako):

$\sum_{i=1}^{2}k_i=n=3$ Hiru balio propio erreal izango ditugu

$d_i=k_i,\ i=1,2$ Balio propio bakoitzaren ordena eta balio propio horri elkartutako azpiespazio propioaren dimentsioa bat etorriko dira

Beraz, $\exists P\in\mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) / D=P^{-1}AP$ matrize diagonala den. A diagonalizatzeko soluzio posible bat hauxe da:

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-6&0\\0&0&-6\end{pmatrix};\ P=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$$

non $B=\left\{\bar{u}_1=(1,1,2),\bar{u}_2=(-2,0,1),\bar{u}_3=(-1,1,0)\right\}\subset\mathbb{R}^3$ bektore propioz osatutako oinarri bat den.

[C] Posible bada, diagonalizatu A matrizea ortogonalki. (**3 puntu**)

A matrizea erreala eta simetrikoa den legez, diagonalizagarria izateaz gain, ortogonalki diagonalizagarria da. Horretarako, bektore ortonormalez osatutako oinarri bat behar dugu.

Balio propio ezberdinei elkartutako bektore propioak ortogonalak direnez (kasu honetan $\bar{u}_1 \perp \bar{u}_i,\ i = 2,3$), B oinarri ortogonala den jakiteko, nahikoa da hurrengo biderkadura eskalarra nulua den ikusita: $\langle \bar{u}_2, \bar{u}_3 \rangle = \langle (-2,0,1),(-1,1,0) \rangle = 2 \Leftrightarrow \bar{u}_2 \not\perp \bar{u}_3$.

Gram-Schmidt ortogonalizazio prozesua aplikatuz,

$$\bar{v}_1 = \bar{u}_3 = (-1,1,0);\ \|\bar{v}_1\|^2 = 2$$

$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2}\bar{v}_1 = (-2,0,1) - \frac{2}{2}\bar{v}_1 = (-2,0,1) - (-1,1,0) = (-1,-1,1);\ \|\bar{v}_2\|^2 = 3$$

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_1 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\cancel{\langle \bar{u}_1, \bar{v}_i \rangle}}{\|\bar{v}_i\|^2}\bar{v}_i = \bar{u}_1 = (1,1,2);\ \|\bar{v}_3\|^2 = 6$$

Bektore propioz osatutako sistema ortogonala lortu dugu:
$B_{ORTOG} = \{\bar{v}_i\}_{1 \le i \le 3} \,/\, \mathcal{L}(B_{ORTOG}) = \mathcal{L}(B)$

Azkenik, B_{ORTOG} sistema ortonormalizatuko dugu:

$$B_{ORTON} = \left\{ \bar{w}_i = \frac{\bar{v}_i}{\|\bar{v}_i\|} \right\}_{1 \le i \le 3} \,/\, \mathcal{L}(B_{ORTON}) = \mathcal{L}(B_{ORTOG}) = \mathcal{L}(B)$$

$$B_{ORTON} = \left\{ \bar{w}_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \bar{w}_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \bar{w}_3 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right\}.$$

Beraz, $\exists P \in O_{3\times 3}(\mathbb{R}) \,/\, D = P^T A P$ diagonal nagusian A-ren balio propioak dituen matrize diagonala den. A matrizea ortogonalki diagonalizatzen duen soluzio posible bat honako hau da:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix};\ P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{-\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA
AZKEN AZTERKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

[D] Kalkulatu $\left|-5\left(A^3\right)^T\right|$ eta, posible bada, $\left(A^{-1}\right)^T$. Arrazoitu erantzuna. (**2 puntu**)

Determinanteen propietateak aplikatuz:

$$\left|-5\left(A^3\right)^T\right| = (-5)^3\left|A^{3T}\right| = (-5)^3\left|A^T\right|^3 \underset{\left|A^T\right|=|A|}{=} (-5)^3|A|^3 \underset{|A|=|D|}{=} (-5)^3|D|^3 = 0$$

D eta A antzeko matrizeak direnez, determinante berdinak dituzte: $|A| = |D| = \lambda_1\lambda_2^2 = 0\times(-6)^2 = 0$.

$\lambda = 0$ A-ren balio propio bat den legez, $|A| = |D| = \lambda_1\lambda_2^2 = 0\times(-6)^2 = 0$ da, hau da, A matrize singularra da, beraz, ezin da $\left(A^{-1}\right)^T$ kalkulatu.