<u>ÁLGEBRA LINEAL – Primer Parcial (7 de Enero de 2013)</u>

<u>PRIMER EJERCICIO</u>

1) Consideramos la matriz $A=\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

a) Determinar, razonadamente, los valores de α para los que la matriz A es ortogonal. **(0.25 puntos)**

<u>Solución:</u>

A será ortogonal $\Leftrightarrow A^t=A^{-1}\Leftrightarrow A\cdot A^t=I$. Entonces, en este caso, se deberá cumplir:

$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\ \forall\,\alpha\Rightarrow A\text{ ortogonal}\,\forall\,\alpha.$$

b) Determinar, razonadamente, los valores de α para los que la matriz A es antisimétrica. **(0.25 puntos)**

<u>Solución:</u>

A será antisimétrica $\Leftrightarrow A=-A^t$. Entonces, en este caso, se deberá cumplir:

$\begin{pmatrix}\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\cos(\alpha) & \sin(\alpha)\\ -\sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\end{pmatrix}\Rightarrow$ A será antisimétrica para los valores de α que hagan 0 la diagonal principal de A, esto es:

$$\alpha=\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{5\pi}{2},\ldots,\pm\frac{(2k-1)\cdot\pi}{2},\text{ siendo la matriz }A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\text{ ó }A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

c) Sea B la matriz cuyos elementos son: $b_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 2 & i\neq j\end{cases}$ **y C una matriz antisimétrica, determinar los valores de α para los que se cumple:** $A^{-1}\cdot B+B=(B\cdot A+B+C)^t+C$**.** **(0.5 puntos)**

<u>Solución:</u>

Se cumplirá:

$$A^{-1}\cdot B+B=(B\cdot A+B+C)^t+C\Leftrightarrow A^{-1}\cdot B+B=A^t\cdot B^t+B^t+C^t+C\xrightarrow[\text{por C antisimétrica}]{}$$

$(A^{-1}+I)\cdot B=A^t\cdot B^t+B^t=(A^t+I)\cdot B^t$ pero $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ es simétrica y

A ortogonal $\forall\alpha\rightarrow\forall\alpha$ se cumple $(A^{-1}+I)\cdot B=(A^{-1}+I)\cdot B.$

Es decir, la relación que nos dan se cumple $\forall\,\alpha$.

2) Calcular razonadamente el determinante de la siguiente matriz cuadrada de orden n:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{pmatrix}$$ **(0.5 puntos)**

<u>Solución:</u>

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix} =< \begin{vmatrix} C_1 - C_n \\ C_2 - C_n \\ \dots \\ C_{n-1} - C_n \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 2-n & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 3-n & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} \underset{\text{por ser triangular}}{=}$$

$$=(1-n)(2-n)(3-n)\cdots(-1)\cdot n=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 1\cdot n=(-1)^{n-1}\cdot n!\,.$$

<u>SEGUNDO EJERCICIO</u>

1) **Definición de espacio vectorial. Definición de subespacio vectorial. Condición necesaria y suficiente de subespacio vectorial (0.75 puntos)**

<u>Solución:</u>

Definición. Sea E un conjunto no vacío cuyos elementos se llaman *vectores* (**x**, **y**, **z**,...), y $\mathbb{K}$ un cuerpo (por ejemplo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) cuyos elementos se denominan *escalares* (α, β, γ,...). Definimos en E dos leyes de composición: una interna, que denotaremos por (+) y denominaremos “Suma o adición de vectores de E”, y otra externa, a la que llamaremos “Producto de un vector por un escalar”. En estas condiciones, se dice que E es un *espacio vectorial sobre* $\mathbb{K}$ si se verifican las siguientes condiciones:

I) Para la ley interna “Suma de vectores de E”, el par (E,+) es un Grupo Abeliano, por lo que cumple las propiedades siguientes:

1) $\forall$ **x**,**y** $\in$ E	**x** + **y** = **y** + **x**	Conmutatividad
2) $\forall$ **x**,**y**,**z** $\in$ E	(**x** + **y**) + **z** = **x** + (**y** + **z**)	Asociatividad
3) $\forall$ **x** $\in$ E	$\exists!$**0** $\in$ E / **x** + **0** = **0** + **x** = **x**	Elemento neutro
4) $\forall$ **x** $\in$ E	$\exists$ (-**x**) $\in$ E / **x** + (-**x**) = (-**x**) + **x** = **0**	Elemento opuesto

II) Para la ley de composición externa, “Producto de un vector por un escalar”, que asocia a cada escalar α, y a cada vector **x** de E un vector único, llamado producto de α y **x**, y que se representa por α**x** o **x**α, se satisfacen las siguientes propiedades:

1) $\forall$ **x**, **y** $\in$ E $\wedge$ $\forall$ α $\in$ $\mathbb{K}$	α (**x**+**y**) = α**x** + α**y**
2) $\forall$ **x** $\in$ E $\wedge$ $\forall$ α,β $\in$ $\mathbb{K}$	(α+β) **x** = α**x** + β**x**
3) $\forall$ **x** $\in$ E $\wedge$ $\forall$ α,β $\in$ $\mathbb{K}$	(αβ) **x** = α (β**x**)

4) $\forall$ $\mathbf{x} \in$ E, $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (siendo 1 el elemento neutro del producto en $\mathbb{K}$).

Un *espacio vectorial real* es un espacio vectorial en el que los escalares pertenecen al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales, y un *espacio vectorial complejo* es un espacio vectorial en el que los escalares pertenecen al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Definición. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, si F es un subconjunto no vacío de E y las operaciones que hacen a E espacio vectorial, hacen también de F un espacio vectorial, se dice que F es un *subespacio vectorial* de E.

Para establecer si un subconjunto F de un espacio vectorial E es subespacio vectorial o no es necesario comprobar que se cumple la siguiente condición necesaria y suficiente:

Teorema. Sea E espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. La condición necesaria y suficiente para que un subconjunto F (no vacío) de E sea subespacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ es que contenga al vector nulo de E y sea estable para las operaciones suma de vectores y producto por un escalar; es decir:

I) El vector $\mathbf{0} \in$ E también cumple $\mathbf{0} \in$ F

II) $\forall$ $\mathbf{x},\mathbf{y} \in$ F $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in$ F ($\Rightarrow$ F estable para la suma).
III) $\forall \mathbf{x} \in$ F $\wedge$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ $\alpha\mathbf{x} \in$ F ($\Rightarrow$ F estable para el producto por un escalar).

2) Sea $\mathbb{P}_3(x)$ el espacio real de los polinomios de grado menor o igual que tres y $S=\{p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d \ / \ p'(-1)=0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3(x)$. Se pide:

a) Hallar una base de S y sus ecuaciones implícitas. (0.5 puntos)

b) Completar, razonadamente, la base de S hasta obtener una base de $\mathbb{P}_3(x)$.

(0.25 puntos)

c) Hallar las ecuaciones implícitas de S respecto de la base obtenida en el apartado anterior. (0.25 puntos)

d) Hallar un subespacio vectorial T de $\mathbb{P}_3(x)$ que sea suplementario de S. Escribir el polinomio $p(x)=1+x+x^2$ como suma de un polinomio de S y otro de T. (0.5 puntos)

<u>**Solución:**</u>

a) El subespacio S está formado por los polinomios de la forma:

$$S=\left\{\begin{matrix} p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+c\cdot x+d \ / \ p'(-1)=0 \ \rightarrow \\ p'(x)=3\cdot a\cdot x^2+2\cdot b\cdot x+c \rightarrow p'(-1)=0=3\cdot a-2\cdot b+c \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\text{Ecuación implícita de S: } 3\cdot a-2\cdot b+c=0 \Leftrightarrow c=-3\cdot a+2\cdot b \rightarrow \dim(S)=4-1=3$$

Los polinomios de S son por tanto de la forma:

$$p(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+(2\cdot b-3\cdot a)\cdot x+d=a\cdot(x^3-3\cdot x)+b\cdot(x^2+2\cdot x)+d \rightarrow$$

$S = \text{Span}\{x^3 - 3\cdot x, x^2 + 2\cdot x, 1\}$, siendo $x^3 - 3\cdot x$, $x^2 + 2\cdot x$ y 1 linealmente independientes, ya que: $\alpha_1 \cdot (x^3 - 3\cdot x) + \alpha_2 \cdot (x^2 + 2\cdot x) + \alpha_3 \cdot 1 = 0 \ \forall x \Rightarrow$

$\alpha_3 \cdot 1 + (-3\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2)\cdot x + \alpha_2 \cdot x^2 + \alpha_1 \cdot x^3 = 0 \ \forall x \Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0 \Rightarrow$

$B = \{x^3 - 3\cdot x, x^2 + 2\cdot x, 1\} \equiv$ Base de S.

b) Teniendo en cuenta el teorema de la base incompleta, para completar la base de S, $\{x^3 - 3\cdot x, x^2 + 2\cdot x, 1\}$, hasta obtener una base de $\mathbb{P}_3(x)$, bastará añadir un polinomio de $\mathbb{P}_3(x)$ que sea linealmente independiente con $\{x^3 - 3\cdot x, x^2 + 2\cdot x, 1\}$. Por ejemplo, podemos añadir el polinomio x. El conjunto $\{x^3 - 3\cdot x, x^2 + 2\cdot x, 1, x\}$ es una base de $\mathbb{P}_3(x)$, pues como puede observarse fácilmente, la matriz que tiene por columnas las coordenadas de tales polinomios en la base usual de $\mathbb{P}_3(x)$, que es: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tiene rango 4. Es decir, los 4 polinomios anteriores son libres.

c) Sabemos que la relación existente entre las coordenadas de un mismo vector **x** de un espacio vectorial en 2 bases distintas es $C_B(\mathbf{x}) = P \cdot C_{B'}(\mathbf{x})$ siendo P la matriz del cambio de base. En este caso la relación es:

$$\begin{pmatrix} d \\ c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d' \\ c' \\ b' \\ a' \end{pmatrix} \to \begin{cases} d = b' \\ c = -3\cdot d' + 2\cdot c' + a' \\ b = c' \\ a = d' \end{cases}$$

$\to$ Sustituyendo estos valores en la ecuación implícita de S nos queda:

$$3\cdot a - 2\cdot b + c = 0 \Leftrightarrow 3\cdot d' - 2\cdot c' - 3\cdot d' + 2\cdot c' + a' = 0 \Leftrightarrow a' = 0 \equiv \text{Ecuación en la nueva base.}$$

d) Un subespacio T suplementario de S puede ser $T = \text{Span}\{x\}$, ya que, como acabamos de ver, al ser los 4 polinomios, $\{x^3 - 3\cdot x, x^2 + 2\cdot x, 1, x\}$, linealmente independientes, se cumple obviamente: $S \cap T = \mathbf{0}_{\mathbb{P}^3}$ y consecuentemente, $S \oplus T = \mathbb{P}_3(x)$. Se trata ahora de buscar la única descomposición del polinomio $p(x) = 1 + x + x^2$ como suma de un vector de S y otro de T:

$$1 + x + x^2 = \alpha_1 \cdot (x^3 - 3\cdot x) + \alpha_2 \cdot (x^2 + 2\cdot x) + \alpha_3 \cdot 1 + \alpha_4 \cdot x \Rightarrow$$

$$1 + x + x^2 = \alpha_3 + (-3\cdot\alpha_1 + 2\cdot\alpha_2 + \alpha_4)\cdot x + (\alpha_2)\cdot x^2 + (\alpha_1)\cdot x^3 \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lr} \alpha_3 & =1 \\ -3\cdot\alpha_1+2\cdot\alpha_2+\quad\alpha_4 & =1 \\ \alpha_2 & =1 \\ \alpha_1 & =0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \ 0 \\ \alpha_2 = \ 1 \\ \alpha_3 = \ 1 \\ \alpha_4 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \mathrm{p(x)} = (\mathrm{x}^2+2\cdot \mathrm{x})+1-\mathrm{x} = \mathbf{s}+\mathbf{t} \,/ \\ \mathbf{s} = (\mathrm{x}^2+2\cdot\mathrm{x})+1\in \mathrm{S} \ \text{ y } \ \mathbf{t} = -\mathrm{x}\in \mathrm{T}. \end{array}$$

TERCER EJERCICIO

1) <u>En el espacio vectorial V de las matrices simétricas de orden 2 reales</u>, se considera el subespacio vectorial F generado por:

$$\mathrm{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ \mathrm{A}_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} \ \textbf{y} \ \mathrm{A}_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

a) Hallar la dimensión y una base del subespacio F. (0.5 puntos)

b) Calcular las ecuaciones cartesianas de F respecto de la base usual y comprobar si la matriz $\begin{pmatrix}1&3\\3&2\end{pmatrix}$ pertenece al subespacio F. (0.75 puntos)

c) Se considera la aplicación

$$\begin{array}{rcl} f:\mathrm{V} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \mathrm{A}=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix} & \rightarrow & f(\mathrm{A}) = |a|+|b|+|c| \end{array}$$

Estudiar si es norma. En caso de que no lo sea indicar todos los axiomas que fallen. (0.5 puntos)

<u>Solución:</u>

a) Para estudiar la dimensión del subespacio F hay que ver si las matrices A_1, A_2 y A_3 son o no libres. Estableciendo una relación nulas entre ellas:

$$\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+\alpha_2\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}+\alpha_3\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0\\ \alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_2-\alpha_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=-\alpha_3\\ \alpha_2=\ \alpha_3\end{cases}\forall\alpha_3,\text{ es}$$

decir, las 3 matrices son linealmente dependientes, pues existe una relación nula entre ellas: $-\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+\mathrm{A}_3=(0)\Rightarrow$ sólo hay 2 linealmente independientes; podemos quedarnos por ejemplo con A_1 y A_2. Por tanto, el subespacio F tiene dimensión 2 y una base de él está formada por las matrices A_1 y A_2 : $B_F=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}\right\}$.

b) Como estamos considerando el espacio vectorial V de las matrices simétricas de orden 2, esto es: $V=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix} / a_{ij}\in\mathbb{R}\right\}=\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$, que tiene dimensión 3, el subespacio F tendrá una sola ecuación cartesiana. Para obtenerla, se tiene en cuenta que para que una matriz $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\in F$, el rango de la matriz formada por los vectores coordenados de las matrices A, A_1 y A_2 expresados respecto a la base usual de V tiene que ser 2, es decir, debe cumplirse:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & 0 \\ a_{12} & 1 & 1 \\ a_{22} & 0 & 1\end{vmatrix}=0=a_{11}+a_{22}-a_{12}\equiv \text{Ecuación cartesiana de F.}$$

Para comprobar si la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2\end{pmatrix}\in F$, miramos si cumple esta ecuación. Las coordenadas de esta matriz son $a_{11}=1,\ a_{12}=3,\ a_{22}=2\Rightarrow 1+2-3=0\Rightarrow$ Sí pertenece a F.

c) Dada la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} f:V & \to & \mathbb{R} \\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} & \to & f(A)=|a|+|b|+|c| \end{array}$$

se trata de estudiar si se cumplen o no los axiomas para ser norma:

1) $\forall A\in V\quad f(A)\geq 0$ y $f(A)=0\Leftrightarrow A=(0)$

$f(A)=|a|+|b|+|c|\geq 0$ es evidente por ser suma de valores absolutos.

$f(A)=|a|+|b|+|c|=0\Leftrightarrow a=b=c=0\Rightarrow A=(0)$. Esta propiedad sí se cumple.

2) $\forall A\in V$ y $\forall\lambda\in\mathbb{R}\quad f(\lambda\cdot A)=|\lambda|\cdot f(A)$

$f(\lambda\cdot A)=|\lambda\cdot a|+|\lambda\cdot b|+|\lambda\cdot c|=|\lambda|\cdot\left(|a|+|b|+|c|\right)$. Esta propiedad también se cumple.

3) Desigualdad triangular: $\forall A,\ B\in V\quad f(A+B)\leq f(A)+f(B)$

$f(A+B)=|a+a'|+|b+b'|+|c+c'|\leq|a|+|a'|+|b|+|b'|+|c|+|c'|=f(A)+f(B)$, donde se ha tenido en cuenta la desigualdad triangular que cumple el valor absoluto. Luego, este tercer axioma también se verifica y consecuentemente, la aplicación es norma.

CUARTO EJERCICIO

1) Sea F el subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones $\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+x_4=0 \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}$ **y G el**

subespacio de $\mathbb{R}^4$ de ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x_1 = \lambda + 2\gamma \\ x_2 = \lambda + 2\gamma \\ x_3 = 2\lambda + \gamma \\ x_4 = 2\lambda + \gamma \end{cases}, \ \lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ **.**

Hallar una base de F **y una base de** $F \cap G$ **.** **(0.5 puntos)**

<u>Solución:</u>

El subespacio F tiene dimensión 2 debido a que existen dos ecuaciones implícitas que lo definen. Para obtener una base del mismo hacemos:

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -2x_3 - x_4 \\ 2x_1 + x_2 = -x_3 - 2x_4 \end{cases} < 2E1 - E2 > \begin{cases} 3x_2 = -3x_3 \Rightarrow x_2 = -x_3 \\ x_1 = -2x_2 - 2x_3 - x_4 = -x_4 \end{cases} \Rightarrow$ Los vectores de F son de la forma $\{(-x_4, -x_3, x_3, x_4)\ \forall x_3, x_4\} \Rightarrow$ Base de $F \equiv \{(-1,0,0,1),(0,-1,1,0)\}$, pues generan F y son linealmente independientes.

Hallemos ahora el subespacio intersección $F \cap G$. Las ecuaciones cartesianas de G son claramente: $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow$ Ecuaciones de $F \cap G \equiv \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 \\ x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases} \Rightarrow$ La dimensión de $F \cap G$ es 1 y una base de este subespacio está formada por el vector (-1,-1,1,1).

<u>QUINTO EJERCICIO</u>

1) a) Sea f un endomorfismo lineal definido en un espacio vectorial de dimensión finita. Demostrar que f inyectiva implica que f también es sobreyectiva. (0.25 puntos)

<u>Solución:</u>

Sea $f : E \longrightarrow E$ un endomorfismo. Según el Teorema Fundamental de las aplicaciones lineales: dim E = dim Ker f + dim Im f, pero si f es inyectiva, entonces dim Ker $f = 0$ $\Rightarrow$ dim E = dim Im f $\Rightarrow$ Im $f = E$ $\Leftrightarrow$ f es sobreyectiva.

b) Sea $f : E \longrightarrow F$ **una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales. Demostrar que si** $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ **es un conjunto de vectores linealmente independientes en E y f es inyectiva entonces** $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), ..., f(\mathbf{u}_p)\}$ **es también un sistema libre en F. (0.5 puntos)**

<u>Solución:</u>

Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ un conjunto de vectores de E linealmente independientes. Consideremos la combinación lineal nula:

$$\alpha_1 f(\mathbf{u_1}) + \alpha_2 f(\mathbf{u_2}) + \cdots + \alpha_p f(\mathbf{u_p}) = \mathbf{0_F} \ .$$

que puede escribirse, por ser lineal, como: $f(\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_p\mathbf{u_p}) = \mathbf{0_F}$.

Luego: $\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_p\mathbf{u_p} \in \operatorname{Ker} f$ y por ser f inyectiva, $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0_E}\}$, de donde $\alpha_1\mathbf{u_1} + \alpha_2\mathbf{u_2} + \cdots + \alpha_p\mathbf{u_p} = \mathbf{0_E}$. Como los vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p\}$ son linealmente independientes, entonces: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0$. Por tanto: $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), ..., f(\mathbf{u}_p)\}$ son linealmente independientes.

c) ¿Es también necesario que la aplicación lineal $f : E \longrightarrow F$ sea inyectiva para que se conserve la dependencia lineal de vectores? Justificar la respuesta. (0.25 puntos)

Solución:

No, ya que cualquier aplicación lineal conserva la dependencia lineal de vectores. Así, si el conjunto de vectores $S = \{\mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots \ , \mathbf{e_p}\}$ es linealmente dependiente, entonces el conjunto $f(S) = \{f(\mathbf{e_1}), \ f(\mathbf{e_2}), \ \cdots \ , f(\mathbf{e_p})\}$ también lo es.

En efecto, sea el conjunto de vectores $S = \{\mathbf{e_1}, \ \mathbf{e_2}, \ \cdots \ , \mathbf{e_p}\}$ linealmente dependiente, es decir, $\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \cdots + \alpha_p\mathbf{e_p} = \mathbf{0_E}$ con algún valor de $\alpha_i \neq 0 \quad (\alpha_i \in \mathbb{K})$. Tomando imágenes por f :

$$f(\alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \cdots + \alpha_p\mathbf{e_p}) = f(\mathbf{0_E}) = \mathbf{0_F} = \alpha_1 f(\mathbf{e_1}) + \alpha_2 f(\mathbf{e_2}) + \cdots + \alpha_p f(\mathbf{e_p})$$

con algún $\alpha_i \neq 0 \quad (\alpha_i \in \mathbb{K})$. Luego, el conjunto $f(S) = \{f(\mathbf{e_1}), \ f(\mathbf{e_2}), \ \cdots \ , f(\mathbf{e_p})\}$ es también un sistema ligado.

2) Sea $\mathbb{P}_n(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales. Se considera la aplicación lineal definida como:

$$f : \mathbb{P}_n(x) \longrightarrow \mathbb{P}_n(x)$$
$$p(x) \longrightarrow f[p(x)] = p(x) - p'(x)$$

a) Estudiar la naturaleza de la aplicación, sin hallar su matriz. (0.5 puntos)

b) Hallar la matriz asociada a esta aplicación en la base canónica de $\mathbb{P}_n(x)$ (0.5 puntos)

Solución:

a) $\operatorname{Ker} f = \{p \in \mathbb{P}_n \ / \ f[p(x)] = p(x) - p'(x) = \mathbf{0}_{\mathbb{P}_n}\}$.Luego:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n - (a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1}) = \mathbf{0}_{\mathbb{P}_n} \Rightarrow$$

$$(a_0 - a_1) + (a_1 - 2a_2)x + (a_2 - 3a_3)x^2 + ... + (a_{n-1} - na_n)x^{n-1} + a_n x^n = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n \quad \forall x$$

$$\begin{cases} a_0 = a_1 & & \boxed{a_0 = 0} \\ a_1 = 2a_2 & & \boxed{a_1 = 0} \nearrow \\ a_2 = 3a_3 & \Rightarrow \boxed{a_2 = 0} \nearrow & \\ \ldots & \nearrow & \\ a_{n-1} = na_n & \Rightarrow \boxed{a_{n-1} = 0} & \\ \boxed{a_n = 0} & \nearrow & \end{cases}$$

Ker f = $\{\ p(x) = 0 \quad \forall x\ \} \Rightarrow$ f es inyectiva y dado que f es un endomorfismo, como hemos demostrado anteriormente, f es también sobreyectiva. Luego, f es biyectiva.

b) Consideremos la base canónica de $\mathbb{P}_n(x)$: $\quad B = \left\{1, x, x^2, ..., x^n\right\}$, entonces la matriz asociada a este endomorfismo con respecto a dicha base es:

$$A_{(n+1)x(n+1)} = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ C_B\left(f(1)\right) & C_B\left(f(x)\right) & \cdots & C_B\left(f(x^n)\right) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$f(1) = 1\text{-}0 = 1 \Rightarrow C_B\left(f(1)\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad f(x) = x\text{-}1 \Rightarrow C_B\left(f(x)\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x^2) = x^2 - 2x \Rightarrow C_B\left(f(x^2)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad f(x^3) = x^3 - 3x^2 \Rightarrow C_B\left(f(x^3)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

…….

$$f(x^n) = x^n - n\,x^{n-1} \Rightarrow C_B\left(f(x^n)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ -n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 1 & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & -n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$ de dimensión (n+1)x(n+1).

Una vez conocida la matriz A, fácilmente podemos comprobar el resultado del apartado a), dado que al ser $|A|=1$, rango(A)= n+1 = dim Im f = dim $\mathbb{P}_n(x) \Rightarrow$ Im $f = \mathbb{P}_n(x) \Leftrightarrow f$ es sobreyectiva y como f es un endomorfismo $\Rightarrow$ f es biyectiva.

SEXTO EJERCICIO

1) Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{P}_2(x)$ la aplicación lineal definida por las siguientes condiciones:

- **Cada vector $(0,a,b)$ de $\mathbb{R}^3$ se transforman en el polinomio $a\cdot x + b\cdot x^2$.**
- **El núcleo de f es el subespacio de los vectores de $\mathbb{R}^3$ que tienen las tres componentes iguales.**

Se pide:

a) Hallar la matriz de la aplicación lineal en las bases canónica. (0.5 puntos)

b) Hallar una base de f(S), siendo S el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x_1 = \alpha+\beta \\ x_2 = \alpha+\beta \\ x_3 = \alpha \end{cases}$**. (0.25 puntos)**

c) Hallar, de las dos formas posibles, la matriz de la aplicación lineal considerando la base $B' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$ **en el espacio inicial y la base canónica en el espacio final. (0.75 puntos)**

2) Sea $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el endomorfismo que respecto a las bases canónicas tiene asociada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$**. Hallar las dimensiones de los subespacios Ker f e Im f según los valores de a y b. (0.5 puntos)**

<u>Solución:</u>

1)

a) $\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 \in \mathbb{R}, \right\} = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ x_1, \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Sea

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ / \ a, b \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sea $B = \left\{ \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Entonces $U = \operatorname{Span}\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Sea $B_1 = \{\mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 = x, \mathbf{v}_3 = x^2\}$ la base canónica de $\mathbb{P}_2$.

La matriz de la aplicación lineal será de la forma

$$A_1 = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_{B_1}\left(f(\mathbf{e_1})\right) & C_{B_1}\left(f(\mathbf{e_2})\right) & C_{B_1}\left(f(\mathbf{e}_3)\right) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

Como $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in S \Rightarrow \begin{cases} f(\mathbf{e}_2) = 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 = x \ \Rightarrow C_{B_1}(f(\mathbf{e}_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(\mathbf{e}_3) = 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 = x^2 \Rightarrow C_{B_1}(f(\mathbf{e}_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

Además, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{f lineal}}}{=} f(\mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_3) =$

$= 0 = f(\mathbf{e}_1) + x + x^2 \Rightarrow f(\mathbf{e}_1) = -x - x^2 \Rightarrow C_{B_1}(f(\mathbf{e}_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Consecuentemente, la matriz de la aplicación lineal queda

$$A_1 = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_{B_1}\left(f(\mathbf{e_1})\right) & C_{B_1}\left(f(\mathbf{e_2})\right) & C_{B_1}\left(f(\mathbf{e}_3)\right) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Sabemos que dim(S) = número de parámetros =2.

Si $\mathbf{x} \in S \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha+\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S = \text{Span}\left\{ \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Por tanto, $f(S) = \text{Span}\{f(\mathbf{s}_1), f(\mathbf{s}_2)\}$

y como

$\forall\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ se verifica que $C_{B_1}(f(\mathbf{x})) = A_1 \cdot C_B(\mathbf{x}) = A_1 \cdot \mathbf{x}$ al ser B la base canónica de $\mathbb{R}^3$,

tendremos que

$$\left.\begin{array}{l} C_{B_1}(f(\mathbf{s}_1)) = A_1 \cdot \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{s}_1) = 0 \\ C_{B_1}(f(\mathbf{s}_2)) = A_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow f(\mathbf{s}_2) = -x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(S) = \text{Span}\{-x^2\}$$

c) **<u>Primera forma:</u>** Directamente, sin hacer uso de la matriz de cambio de base.

Sea $B' = \left\{ \mathbf{e'}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{e'}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e'}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ la nueva base de $\mathbb{R}^3$. Entonces, la nueva

matriz asociada a la aplicación lineal es

$$A_2 = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ C_{B_1}(f(\mathbf{e'}_1)) & C_{B_1}(f(\mathbf{e'}_2)) & C_{B_1}(f(\mathbf{e'}_3)) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l}
f(\mathbf{e}'_1)=f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\underset{\substack{\downarrow\\ \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)\in \operatorname{Ker} f}}{=}0\Rightarrow C_{B_1}(f(\mathbf{e}'_1))=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\[2ex]
f(\mathbf{e}'_2)=f(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)\underset{\substack{\downarrow\\ f\ \text{lineal}}}{=}f(\mathbf{e}_1)+f(\mathbf{e}_2)=-x-x^2+x=-x^2\Rightarrow C_{B_1}(f(\mathbf{e}'_1))=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\\[2ex]
f(\mathbf{e}'_3)=f(\mathbf{e}_1)=-x-x^2\Rightarrow C_{B_1}(f(\mathbf{e}'_1))=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}
\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow A_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Segunda forma: Haciendo uso de la matriz de cambio de base. Tenemos que

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{P}_2$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Base } B \arrow[r, "A_1"] \arrow[d, "P"'] & \text{Base } B_1 \arrow[d] \\
\text{Base } B' \arrow[r, "A_2"] & \text{Base } B_1
\end{tikzcd}$$

y $\begin{cases} C_{B_1}(f(\mathbf{x}))=A_1\cdot C_B(\mathbf{x}) & (1)\\ C_{B_1}(f(\mathbf{x}))=A_2\cdot C_{B'}(\mathbf{x}) & (2)\end{cases}$

Además $C_B(\mathbf{x})=P\cdot C_{B'}(\mathbf{x})$ donde $P=\begin{pmatrix}\uparrow&\uparrow&\uparrow\\ C_B(\mathbf{e}'_1)&C_B(\mathbf{e}'_2)&C_B(\mathbf{e}'_3)\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ ya

que

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \Rightarrow C_B(\mathbf{e}'_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \Rightarrow C_B(\mathbf{e}'_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_1 \Rightarrow C_B(\mathbf{e}'_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Sustituyendo esta última igualdad en (1), obtenemos que $C_{B_1}(f(\mathbf{x})) = A_1 \cdot P \cdot C_{B'}(\mathbf{x})$ y comparando con (2), concluimos que

$$A_2 = A_1 \cdot P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2) Sabemos que dim(Im f)=Rang(f)=Rang(A) y que por el Teorema fundamental de las aplicaciones lineales dim($\mathbb{R}^3$)=3=dim(Ker f)+dim(Im f).

Estudiaremos el rango de la matriz A para los distintos valores de a y b.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = a \cdot b + 1 + 1 - a - b - 1 = a \cdot (b-1) - (b-1) = (a-1) \cdot (b-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \vee \\ b = 1 \end{cases}$$

- Si $a \neq 1, b \neq 1$ tenemos que Rang(A)=3=dim(Imf) $\Rightarrow$ dim(Ker f)=0.
- Si

  $$a = 1, b \neq 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \text{ y } \mathrm{Rang}(A) = 2 = \dim(\mathrm{Im}\, f) \text{ pues } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b - 1 \neq 0,$$

  de donde dim(Ker f)=1.
- Si $a \neq 1, b = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{Rang}(A) = 2 = \dim(\mathrm{Im}\, f)$ pues $\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1 \neq 0$

  , de donde dim(Ker f)=1.
- $a = 1, b = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\mathrm{Rang}(A) = 1 = \dim(\mathrm{Im}\, f) \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}\, f) = 2$.