ÁLGEBRA LINEAL – Examen Final – Primer parcial (20 de Mayo de 2013)

EJERCICIO 1

1.- a) Se considera una matriz $A=\left(\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline (0) & B \end{array}\right)$**, siendo B una matriz regular. Hallar** A^{-1} **y** A^3**.**

b) Aplicar lo obtenido en el apartado anterior para calcular la inversa de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1.5 puntos)

Solución:

a) Calculamos A^{-1} utilizando la teoría de las matrices particionadas, es decir consideramos A^{-1} dividida en la forma: $A^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & T \end{array}\right)$ y calculamos estos bloques X, Y, Z, T imponiendo que $A\cdot A^{-1}=I$, es decir:

$$\left(\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline (0) & B \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} X & Y \\ \hline Z & T \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} I & (0) \\ \hline (0) & I \end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases} B\cdot X+Z=I \xrightarrow[\text{por B regular}]{} X=B^{-1} \\ B\cdot Y+T=(0) \xrightarrow[\text{por B regular}]{} Y=-(B^{-1})^2 \\ B\cdot Z=(0) \xrightarrow[\text{por B regular}]{} Z=(0) \\ B\cdot T=I \xrightarrow[\text{por B regular}]{} T=B^{-1} \end{cases}$$

Luego: $A^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & -(B^{-1})^2 \\ \hline (0) & B^{-1} \end{array}\right)$.

De igual forma para calcular A^3 hacemos:

$$A^3=\left(\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline (0) & B \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline (0) & B \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline (0) & B \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} B^2 & 2B \\ \hline (0) & B^2 \end{array}\right)\cdot\left(\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline (0) & B \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} B^3 & 3B^2 \\ \hline (0) & B^3 \end{array}\right).$$

b) Particionamos A en la forma:

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c|c} B & I \\ \hline (0) & B \end{array}\right)\to A^{-1}=\left(\begin{array}{c|c} B^{-1} & -(B^{-1})^2 \\ \hline (0) & B^{-1} \end{array}\right).$$ Se trata de calcular por tanto $B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot B^a$ siendo

$$B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\rightarrow |B|=-2,\ B^{a}=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}\rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}\text{ y}$$

$$\left(B^{-1}\right)^2=\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11/2&-5/2\\-15/4&7/4\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$A^{-1}=\left(\begin{array}{cc|cc}-2&1&-11/2&5/2\\3/2&-1/2&15/4&-7/4\\\hline 0&0&-2&1\\0&0&3/2&-1/2\end{array}\right).$$

2. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&5\\2&6&3\end{pmatrix}$**, encontrar tres matrices elementales** Q_1, Q_2 y Q_3 **tales que** $A\cdot Q_1\cdot Q_2\cdot Q_3 = L$**, siendo L una matriz triangular inferior. (1 punto)**

Solución:

Sabemos que hacer una transformación elemental de columnas equivale a postmultiplicar A por la matriz elemental de columnas asociada a tal transformación elemental. Por tanto, se trata de pasar de A a la matriz triangular inferior L haciendo transformaciones elementales de columnas:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&5\\2&6&3\end{pmatrix}<C_2-2C_1>\overset{A_1=AQ_1}{\begin{pmatrix}1&0&1\\3&-2&5\\2&2&3\end{pmatrix}}<C_3-C_1>\overset{A_2=AQ_1Q_2}{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&-2&2\\2&2&1\end{pmatrix}}<C_3+C_2>\overset{L=AQ_1Q_2Q_3}{\begin{pmatrix}1&0&0\\3&-2&0\\2&2&3\end{pmatrix}}=L$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}<C_2-2C_1>\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=Q_1;\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}<C_3-C_1>\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=Q_2;$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}<C_3+C_2>\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=Q_3\quad \text{y se cumple } L=A\cdot Q_1\cdot Q_2\cdot Q_3\text{ . En efecto:}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\3&4&5\\2&6&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&-2&0\\2&2&3\end{pmatrix}.$$

3. Sea V el espacio vectorial $V=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ /\ f \text{ continua}\}$**. Estudiar si el subconjunto** $U=\{f\in V\ /\ f(1)=f(0)=f(-1)\}$ **es subespacio vectorial de V.**

(0.5 puntos)

Solución:

Se trata de ver si U cumple la condición necesaria y suficiente para ser subespacio vectorial:

1) El vector nulo debe pertenecer a U, pero es evidente que la función nula pertenece a U, pues como tal función cumple f(x) =0 $\forall$x $\to$ f(1)=f(0)=f(-1)=0.

2) U debe ser estable para la suma, es decir: $\forall f_1, f_2 \in U \Rightarrow f_1 + f_2 \in U$. Veamos si $f_1 + f_2 \in U$. Para ello debe cumplirse $(f_1 + f_2)(1) = (f_1 + f_2)(0) = (f_1 + f_2)(-1)$. Pero al ser $f_1, f_2 \in U$, se tiene que:

$(f_1 + f_2)(1) = f_1(1) + f_2(1) = f_1(0) + f_2(0) = f_1(-1) + f_2(-1) = (f_1 + f_2)(0) = (f_1 + f_2)(-1)$.

Luego, U es estable para la suma.

3) U debe ser estable para el producto por un escalar, esto es: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ y $\forall f \in U \Rightarrow \lambda \cdot f \in U$. Veamos si $\lambda \cdot f \in U$. Para ello debe cumplirse $(\lambda \cdot f)(1) = (\lambda \cdot f)(0) = (\lambda \cdot f)(-1)$. Pero al ser $f \in U$, se tiene que:

$(\lambda \cdot f)(1) = \lambda \cdot f(1) = \lambda \cdot f(0) = \lambda \cdot f(-1) = (\lambda \cdot f)(0) = (\lambda \cdot f)(-1)$. Luego, U es estable para el producto por un escalar.

Consecuentemente, U sí es subespacio vectorial de V.

<u>EJERCICIO 2</u>

1. Se considera el espacio vectorial $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de dimensión 2x2. Demostrar que toda matriz de $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$ se puede escribir de forma única como suma de una matriz de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 3\cdot b + 2\cdot a \\ 2\cdot b & a \end{pmatrix}$ y otra de la forma $\begin{pmatrix} c-d & 0 \\ c+d & 0 \end{pmatrix}$. <u>Realizarlo utilizando únicamente conceptos de espacios y subespacios vectoriales</u>. (2 puntos)

<u>Solución:</u>

Las matrices de la forma $\begin{pmatrix} 0 & 3\cdot b + 2\cdot a \\ 2\cdot b & a \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, pertenecen al subespacio S de $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$, $S = \text{Span}\left\{ S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, que es de dimensión 2, ya que estas dos matrices S_1 y S_2 son libres, pues estableciendo una relación nula entre ellas queda:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ 2b = 0 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 0.$$

Por otro lado, las matrices de la forma $\begin{pmatrix} c-d & 0 \\ c+d & 0 \end{pmatrix} = c\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pertenecen al subespacio T de $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$, $T = \text{Span}\left\{ T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$, que también es de dimensión 2, ya que estas dos matrices T_1 y T_2 son libres, pues estableciendo una relación nula entre ellas queda:

$$c\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\cdot\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c-d=0 \\ c+d=0 \end{cases} \Rightarrow c=d=0.$$

Entonces la propiedad que queremos demostrar será cierta si demostramos que $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R}) = S \oplus T$, es decir, si los subespacios S y T son suplementarios. Para ello tenemos que ver cuáles son los subespacios $S \cap T$ y $S+T$. Una base de S+T estará formada por las matrices libres de entre

$\left\{ S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Para estudiar si estas 4 matrices son o no linealmente independientes podemos formar la matriz que tiene por columnas las coordenadas de tales matrices en la base usual de las matrices de $\mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$, que es $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. El rango de esta matriz es 4 porque su determinante vale:

$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$. Por tanto, las 4 matrices son libres y consecuentemente,

$$\dim(S+T) = 4 = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T) = 2 + 2 - \dim(S \cap T) \to \dim(S \cap T) = 0.$$

Es decir, se cumple lo que queríamos probar: $S \cap T = (0)$ y $S \oplus T = \mathbb{E}_{2x2}(\mathbb{R})$. Entonces, sabemos que toda matriz cuadrada de dimensión 2x2 se va a descomponer de forma única como suma de una matriz de S más otra de T.

2. En $\mathbb{R}^3$ se tiene una base $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ y un vector x cuyas coordenadas respecto a B son $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. Dado el conjunto libre $S=\{e_1+e_2,e_1+e_2+e_3\}$, completarlo para obtener una base B' de $\mathbb{R}^3$ tal que las coordenadas del vector x anterior respecto a B' sean $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. (1 punto)

Solución:

La nueva base B' de $\mathbb{R}^3$ será de la forma $B'=\{e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,a\cdot e_1+b\cdot e_2+c\cdot e_3\}$.

Se trata de hallar los valores de a, b, c para que el vector **x**= $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=e_1-e_2+2e_3$, tenga por coordenadas $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ en esta nueva base B'. Es decir se debe verificar:

$$e_1-e_2+2e_3=1(e_1+e_2)+1(e_1+e_2+e_3)+1(a\cdot e_1+b\cdot e_2+c\cdot e_3)=(a+2)e_1+(b+2)e_2+(c+1)e_3$$

$$\xrightarrow[\text{por ser las coordenadas respecto a una base únicas}]{}\begin{cases}a+2=1\\b+2=-1\\c+1=2\end{cases}\rightarrow a=-1,b=-3,c=1\rightarrow$$

$$B'=\{e_1+e_2,e_1+e_2+e_3,-e_1-3e_2+e_3\}.$$

Además, estos tres vectores son linealmente independientes, ya que el rango de la matriz que tiene por columnas las coordenadas de estos tres vectores respecto a la base B, es tres. En efecto:

$$\text{rango}(A)=\text{rango}\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-3\\0&1&1\end{pmatrix}=\text{rango}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&-2\\0&1&1\end{pmatrix}=3.$$

3. Demostrar que todo vector x de un espacio vectorial E se expresa de forma única como combinación lineal de los vectores de una base B de E. (0.5 puntos)

Solución:

Sea B = {$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, ..., $\mathbf{e}_n$} una base de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{K}$. Supongamos que el vector se puede expresar de dos formas como combinación lineal de los vectores de B:

$$\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+...+x_n\mathbf{e}_n, \qquad \mathbf{x}=x'_1\mathbf{e}_1+x'_2\mathbf{e}_2+...+x'_n\mathbf{e}_n$$

Restando ambas expresiones resulta:

$$\mathbf{0} = (x_1 - x_1')\,\mathbf{e}_1 + (x_2 - x_2')\,\mathbf{e}_2 + \ldots + (x_n - x_n')\,\mathbf{e}_n.$$

Ahora bien, siendo la base una familia libre se llega a que:

$$x_1 - x_1' = x_2 - x_2' = \ldots = x_n - x_n' = 0$$

de donde $x_i = x_i'$ $\forall i=1,2,\ldots,n$. En consecuencia, **x** se expresa de manera única.

A los escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se les denomina *coordenadas* del vector **x** en la base B.

EJERCICIO 3

1. Dado el endomorfismo:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}_3 &\longrightarrow \mathbb{P}_3 \\ p(x) &\longrightarrow p''(1)\,x + p(0) \end{aligned}$$

a) Calcular la matriz asociada a dicha aplicación en la base $B = \{1, x-1, x^2, x^3\}$**.**

(0.75 puntos)

b) Calcular una base (<u>de polinomios</u>) de Kerf de formas distintas:

b1) Utilizando la matriz anterior

b2) Directamente (sin utilizar la matriz).

(1 punto)

c) Dado el subespacio vectorial de $\mathbb{P}_3$**:**

$$S = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 \ / \ p'(x) = p'(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Hallar una base de Im(S). **(1 punto)**

<u>Solución:</u>

a) La matriz asociada a f en la base $B = \{1, x-1, x^2, x^3\}$ tiene por columnas las coordenadas de las imágenes por f de los polinomios 1, x-1, x^2, x^3, respecto a la misma base B. Calculamos por tanto, tales imágenes:

$f(1) = 1 \Rightarrow C_B(1) = (1,0,0,0)^t$

$f(x-1) = -1 \Rightarrow C_B(-1) = (-1,0,0,0)^t$

$f(x^2) = 2x + 0 = 2x$. Hallamos ahora las coordenadas de este polinomio en B:

$2x = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot (x-1) + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 = (\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 \Rightarrow$

$\alpha_1 - \alpha_2 = 0,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0 \Rightarrow C_B(2x) = (2,2,0,0)^t$.

$f(x^3) = 6x + 0 = 6x$. Hallamos también las coordenadas de este polinomio en B:

$6x = \alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot (x-1) + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 = (\alpha_1 - \alpha_2) + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 + \alpha_4 \cdot x^3 \Rightarrow$

$\alpha_1 - \alpha_2 = 0,\ \alpha_2 = 6,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0 \Rightarrow C_B(6x) = (6,6,0,0)^t$.

Por tanto, la matriz de la aplicación en B es: $A=\begin{pmatrix}1&-1&2&6\\0&0&2&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

b.1) Sabemos que $\mathrm{Ker}(f)=\{p(x)/f(p)=\mathbf{0}\equiv \text{Polinomio nulo}\}$. Sea $p(x)\in\mathbb{P}_3(x)/$

$$p(x)=a_0\cdot 1+a_1\cdot(x-1)+a_2\cdot x^2+a_3\cdot x^3\Rightarrow f(p)=\begin{pmatrix}1&-1&2&6\\0&0&2&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Se trata de resolver este sistema homogéneo. Como el rango de la matriz A es 2, basta quedarse con las dos primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{cases}a_0-a_1+2a_2+6a_3=0\\ \qquad\qquad 2a_2+6a_3=0\end{cases}\right\}\Rightarrow \text{Ecuaciones cartesianas de Ker f}\equiv\left.\begin{cases}a_0-a_1=0\\a_2+3a_3=0\end{cases}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}a_0=a_1\\a_2=-3a_3\end{matrix}\right\}$$

Es decir, la dimensión del Ker(f) es 2 y sus polinomios son de la forma:

$$a_1+a_1(x-1)-3a_3\cdot x^2+a_3\cdot x^3=a_1x+a_3(x^3-3x^2)\Rightarrow \mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Span}\{x,x^3-3x^2\}.$$

b.2) Para calcular el Ker(f) directamente consideramos un polinomio $p(x)\in\mathbb{P}_3(x)/$

$p(x)=b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2+b_3\cdot x^3$, como $p''(x)=2b_2+6b_3\cdot x\Rightarrow$

$f(p)=p''(1)\cdot x+p(0)=(2b_2+6b_3)\cdot x+b_0=0\quad\forall x\quad\Rightarrow$

$$\begin{cases}b_0=0\\b_2+3b_3=0\end{cases}\equiv\text{Ecuaciones cartesianas del Ker}(f)\Rightarrow\begin{cases}b_0=0\\b_2=-3b_3\end{cases}\Rightarrow$$ Los polinomios de Ker(f) son de la forma:

$$b_1\cdot x-3b_3\cdot x^2+b_3\cdot x^3=b_1\cdot x+b_3\cdot(x^3-3\cdot x^2)\Rightarrow\text{Base de Ker}(f)=\{x,x^3-3\cdot x^2\}.$$

c) Hallemos una base de $S=\{p(x)\in\mathbb{P}_3\ /\ p'(x)=p'(-x)\quad\forall x\in\mathbb{R}\}$. Como $p(x)=b_0+b_1\cdot x+b_2\cdot x^2+b_3\cdot x^3$, $p'(x)=b_1+2b_2\cdot x+3b_3\cdot x^2$, $p'(x)=p'(-x)\Leftrightarrow$

$b_1+2b_2\cdot x+3b_3\cdot x^2=b_1-2b_2\cdot x+3b_3\cdot x^2\quad\forall x\Leftrightarrow b_2=0$, y b_0,b_1,b_3 cualesquiera $\Rightarrow$

Los polinomios de S son de la forma: $p(x)=b_0+b_1\cdot x+b_3\cdot x^3\Rightarrow$ Una base de S es $\{1,x,x^3\}$. Entonces f(S) estará generado por $\{f(1),f(x),f(x^3)\}$. Hallemos estas imágenes: $f(1)=1$, $f(x)=0$, $f(x^3)=6x\Rightarrow f(S)=\mathrm{Span}\{1,0,6x\}=\mathrm{Span}\{1,\ x\}$. Es decir, una base de Im(S) es {1, x}, pues estos dos polinomios son linealmente independientes.

2. Sea f un endomorfismo en un espacio vectorial E ,

$B_1=\{u_1,u_2,\cdots,u_p\}$ **una base de Kerf**

$B_2=\{u_1,u_2,\cdots,u_p,v_1,v_2,\cdots,v_r\}$ **una base de E.**

<u>Demuestra</u> que $\{f(v_1),f(v_2),\cdots,f(v_r)\}$ es una base de Imf, demostrando las propiedades en que te basas. (0.75 puntos)

<u>Solución:</u>

Para demostrar que $\{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_r)\}$ es una base de Imf hay que probar que es un sistema generador de Imf y que son un conjunto de vectores linealmente independientes.

Empezamos probando que son un sistema generador:

Como $B_2 = \{u_1, u_2, \cdots, u_p, v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ es una base de E, cualquier vector **x** de E se expresa como combinación lineal de esos vectores, esto es:

$$\exists \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p,\ \beta_1, \beta_2, ..., \beta_r \in K\ /\ x = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + ... + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + ... + \beta_r \cdot v_r$$

Tomándo imágenes por f y teniendo en cuenta que es lineal:

$$f(x) = \alpha_1 \cdot f(u_1) + \alpha_2 \cdot f(u_2) + ... + \alpha_p \cdot f(u_p) + \beta_1 \cdot f(v_1) + \beta_2 \cdot f(v_2) + ... + \beta_r \cdot f(v_r) \underset{\text{por ser}\{u_1,...,u_p\} \in \text{Kerf}}{=}$$

$$\beta_1 \cdot f(v_1) + \beta_2 \cdot f(v_2) + ... + \beta_r \cdot f(v_r) \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Span}\{f(v_1), f(v_2), ..., f(v_r)\}.$$

Veamos que $\{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_r)\}$ son libres. Para ello consideramos una relación nula entre ellos:

$$\beta_1 \cdot f(v_1) + \beta_2 \cdot f(v_2) + ... + \beta_r \cdot f(v_r) = \mathbf{0} = f(\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + ... + \beta_r \cdot v_r) \Rightarrow$$
$$\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + ... + \beta_r \cdot v_r \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + ... + \beta_r \cdot v_r = \mathbf{0}$$

donde se ha tenido en cuenta que al ser $B_2 = \{u_1, u_2, \cdots, u_p, v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ base de E y $B_1 = \{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$ base de Kerf, la única posibilidad de que el vector $\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + ... + \beta_r \cdot v_r$ pertenezca al $\operatorname{Ker} f$ es que sea el vector nulo. Teniendo en cuenta ahora que todos estos vectores son libres, la relación anterior implica que $\beta_1 = \beta_2 = ... = \beta_r = 0$, y consecuentemente $\{f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_r)\}$ son también libres y por tanto, constituyen una base de Imf.

ÁLGEBRA LINEAL – Examen Final - Segundo parcial (20 de Mayo de 2013)

EJERCICIO 1

1. **En el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que dos se considera el siguiente producto escalar:**

$$<,>: \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \quad \to \mathbb{R}$$
$$(p,q) \quad \to < p,q >= p(0)\cdot q(0) + p'(0)\cdot q'(0) + \frac{1}{4} p''(0)\cdot q''(0)$$

   a) **Hallar la matriz de dicho producto escalar con respecto a la base** $B = \{e_1, e_2, e_3\} = \{1+x^2, x+x^2, 1+x+x^2\}$.
   b) **¿Son los polinomios** $1+x^2$ **y** $x+x^2$ **ortogonales? En caso de no serlo, obtener a partir de ellos un sistema ortogonal empleando el método de Gram-Schmidt.**
   c) **Hallar un polinomio que forme ángulos iguales con los vectores** e_1 **y** e_2.

(1.5 puntos)

Solución:

a) Sabemos que la matriz asociada a un producto escalar fijada una base B viene dada por:

$$G_B = \begin{pmatrix} <\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1> & <\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2> & <\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3> \\ <\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2> & <\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2> & <\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3> \\ <\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3> & <\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3> & <\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3> \end{pmatrix}$$

. Se trata de calcular estos productos escalares, para lo cual tenemos en cuenta que:

$e_1 = 1+x^2;\ e_1' = 2x;\ e_1'' = 2;\ e_2 = x+x^2;\ e_2' = 1+2x;\ e_1'' = 2; e_3 = 1+x+x^2;\ e_3' = 1+2x;\ e_3'' = 2.$
Por tanto:

$$<\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1> = <1+x^2, 1+x^2> = 1\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2 = 2;$$
$$<\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2> = <1+x^2, x+x^2> = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2 = 1 = <\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1>;$$
$$<\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_3> = <1+x^2, 1+x+x^2> = 1\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2 = 2 = <\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_1>;$$
$$\to$$
$$<\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2> = <x+x^2, x+x^2> = 1\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2 = 2;$$
$$<\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3> = <x+x^2, 1+x+x^2> = 1\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2 = 2 = <\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_2>;$$
$$<\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_3> = <1+x+x^2, 1+x+x^2> = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 2 = 3;$$

La matriz que nos piden es: $G_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Hemos visto que $<\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}>=<1+x^2, x+x^2>=1\neq 0 \Rightarrow$ Tales polinomios no son ortogonales. Los vamos a ortogonalizar por el método de Gram-Schmidt. Para ello, elegimos $\{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2}\}$ /

- $\mathbf{w_1}=\mathbf{e_1}=1+x^2$
- $\mathbf{w_2}=\mathbf{e_2}+\alpha_1\cdot\mathbf{w_1} / <\mathbf{w_1},\mathbf{w_2}>=0=<\mathbf{w_1},\mathbf{e_2}+\alpha_1\cdot\mathbf{w_1}>=<\mathbf{w_1},\mathbf{e_2}>+\alpha_1\cdot<\mathbf{w_1},\mathbf{w_1}>\rightarrow$

$$\alpha_1=\frac{-<\mathbf{w_1},\mathbf{e_2}>}{<\mathbf{w_1},\mathbf{w_1}>}=\frac{-<\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}>}{<\mathbf{e_1},\mathbf{e_1}>}=\frac{-1}{2}\rightarrow\mathbf{w_2}=\mathbf{e_2}-\frac{1}{2}\mathbf{e_1}=x+x^2-\frac{1}{2}(1+x^2)=\frac{1}{2}\cdot x^2+x-\frac{1}{2}$$

El conjunto ortogonal es $\left\{1+x^2, \frac{1}{2}\cdot x^2+x-\frac{1}{2}\right\}$.

c) Un polinomio p formará ángulos iguales con e_1 y e_2 si el coseno del ángulo entre p y e_1, es el mismo que el coseno del ángulo entre p y e_2. Entonces, como se define: $\cos(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{<\mathbf{x},\mathbf{y}>}{\|\mathbf{x}\|\cdot\|\mathbf{y}\|}$, se trata de hallar un polinomio $p(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2 / \frac{<p,1+x^2>}{\|p\|\cdot\|1+x^2\|}=\frac{<p,x+x^2>}{\|p\|\cdot\|x+x^2\|}$. Pero como se tiene que: $\|e_1\|=\|1+x^2\|=\sqrt{2}=\|e_2\|=\|x+x^2\|$, la igualdad anterior se cumple siempre que: $<p,1+x^2>=<p,x+x^2>$. Usando la definición del producto escalar, al ser

$$p'(x)=a_1+2a_2\cdot x,\ p''(x)=2a_2\Rightarrow\begin{cases}<p,1+x^2>=a_0\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2a_2\cdot 2=a_0+a_2\\ <p,x+x^2>=a_1\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2a_2\cdot 2=a_1+a_2\end{cases}\Rightarrow$$

$a_0+a_2=a_1+a_2\Leftrightarrow a_0=a_1,\ \forall a_2\Rightarrow$ Cualquier polinomio $p(x)=a_0(1+x)+a_2\cdot x^2\ \forall a_0,a_2$

forma ángulos iguales con e_1 y e_2.

2. Sean A, B $\in E_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\bar{x}_1\neq\bar{0}, \bar{x}_2\neq\bar{0}$. Justificar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si A $\bar{x}_1=\lambda\,\bar{x}_1$ y B $\bar{x}_1=\mu\,\bar{x}_1$, entonces $\lambda+\mu$ es valor propio de A+B.

b) Si A $\bar{x}_1=\lambda\,\bar{x}_1$ y B $\bar{x}_1=\mu\,\bar{x}_1$, entonces $\bar{x}_1$ <u>no</u> es un vector propio de A· B.

c) Si A $\bar{x}_1=\lambda\,\bar{x}_1$ y A $\bar{x}_2=\mu\,\bar{x}_2$, entonces $\bar{x}_1+\bar{x}_2$ es un vector propio asociado a $\lambda+\mu$ respecto de A.

(0.75 puntos)

<u>Solución:</u>

a) Veamos lo que vale $(\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\vec{\mathbf{x}}_1 = \mathrm{A}\,\vec{\mathbf{x}}_1 + \mathrm{B}\,\vec{\mathbf{x}}_1 = \lambda\,\vec{\mathbf{x}}_1 + \mu\,\vec{\mathbf{x}}_1 = (\lambda+\mu)\,\vec{\mathbf{x}}_1 \Rightarrow$ La afirmación es **verdadera**.

b) Veamos lo que vale

$(\mathrm{AB})\,\vec{\mathbf{x}}_1 = \mathrm{A}\,(\mathrm{B}\,\vec{\mathbf{x}}_1) = \mathrm{A}\cdot\mu\,\vec{\mathbf{x}}_1 = \mu\cdot\mathrm{A}\,\vec{\mathbf{x}}_1 = \mu\cdot\lambda\cdot\vec{\mathbf{x}}_1 = (\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{\mathbf{x}}_1 \Rightarrow$ La afirmación es **falsa**, porque acabamos de probar que $\lambda\cdot\mu$ es autovalor de AB, siendo $\vec{\mathbf{x}}_1$ su vector propio asociado.

c) Veamos lo que vale $\mathrm{A}(\vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2) = \mathrm{A}\,\vec{\mathbf{x}}_1 + \mathrm{A}\,\vec{\mathbf{x}}_2 = \lambda\,\vec{\mathbf{x}}_1 + \mu\,\vec{\mathbf{x}}_2$, pero esto no significa que $\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu}$ sea autovalor de A, luego, la afirmación es **falsa**.

EJERCICIO 2

1. Sea $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Obtener J, la forma reducida de Jordan de la matriz anterior y la correspondiente base de Jordan. (1 punto)

b) Si A representa la matriz de un endomorfismo f, demostrar que efectivamente la matriz asociada a f en la base de Jordan calculada en el apartado anterior es la matriz J obtenida. (0.5 puntos)

Solución:

a)b) Al ser A una matriz triangular inferior sus autovalores son los elementos de la diagonal principal, es decir, A tiene por autovalor $\lambda = 1$ con multiplicidad algebraica m= 3. Se trata de hallar su subespacio propio correspondiente:

$\mathrm{V}_1(1) = \{\mathbf{x}\,/\,(\mathrm{A}-\mathrm{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ definido por las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\textit{por ser rango}(A-I)=2]{} \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_1 = 0, v_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{V}_1(1) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim \mathrm{V}_1(1) = 1 < 3 = m$$

Dado que $\dim \mathrm{V}_1(1) = 1 < 3 =$ multiplicidad algebraica de $\lambda=1$, esto implica que no existe una base de vectores propios, y consecuentemente, A no es diagonalizable. Entonces, calculamos una base de vectores propios generalizados, tal que la matriz asociada al endomorfismo correspondiente a la matriz A en esa base, sea la forma canónica de Jordan, es decir, la matriz triangular semejante a A más sencilla posible.

Para ello calculamos $\mathrm{V}_2(1)=\{\mathbf{x} / (\mathrm{A}-\mathrm{I})^2\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&2&0\end{pmatrix}^2\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\xleftrightarrow[por\,ser\,rango(A-I)^2=1]{}v_1=0\Rightarrow$$

$$\mathrm{V}_2(1)=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\Rightarrow\dim\mathrm{V}_2(1)=2<3=m$$

Este subespacio aún no es el maximal. Por tanto, calculamos $\mathrm{V}_3(1)=\{\mathbf{x} / (\mathrm{A}-\mathrm{I})^3\mathbf{x}=\mathbf{0}\}$.

Pero $(\mathrm{A}-\mathrm{I})^3=(0)\Rightarrow$ dim $\mathrm{V}_3(1)=3$, luego $\mathrm{V}_3(1)=\mathbb{R}^3$ es el subespacio maximal asociado a $\lambda=1$.

Para formar la base de Jordan hacemos lo siguiente:

Elegimos un vector $\mathbf{u}_3\in\mathrm{V}_3(1)-\mathrm{V}_2(1)$, por ejemplo $\mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, y obtenemos $\mathbf{u}_2$ haciendo: $\mathbf{u}_2=(\mathrm{A}-\mathrm{I})\mathbf{u}_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\in\mathrm{V}_2(1)$. Este vector ya pertenece a $\mathrm{V}_2(1)$ porque $(\mathrm{A}-\mathrm{I})^2\mathbf{u}_2=(\mathrm{A}-\mathrm{I})^3\mathbf{u}_3=\mathbf{0}$.

A continuación hacemos $\mathbf{u}_1=(\mathrm{A}-\mathrm{I})\mathbf{u}_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\in\mathrm{V}_1(1)$. Este vector ya pertenece a $\mathrm{V}_1(1)$ porque $(\mathrm{A}-\mathrm{I})\mathbf{u}_1=(\mathrm{A}-\mathrm{I})^2\mathbf{u}_2=\mathbf{0}$.

Entonces, considerando la base $\mathrm{B}_\mathrm{J}=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, ésta es ya la base de Jordan. En efecto, si consideramos el endomorfismo f asociado a la matriz A, las imágenes por f de estos vectores $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u_3}$ de la base $\mathrm{B_J}$ son :

$$\mathrm{f}(\mathbf{u}_1)=\mathrm{A}\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_1 \quad \text{ya que } \mathbf{u}_1\in\mathrm{V}_1(1)$$
$$\mathrm{f}(\mathbf{u}_2)=\mathrm{A}\mathbf{u}_2\underset{\text{por ser }\mathbf{u}_1=(\mathrm{A}-\mathrm{I})\mathbf{u}_2}{=}\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2$$
$$\mathrm{f}(\mathbf{u}_3)=\mathrm{A}\mathbf{u}_3\underset{\text{por ser }\mathbf{u}_2=(\mathrm{A}-\mathrm{I})\mathbf{u}_3}{=}\mathbf{u}_2+\mathbf{u}_3$$

Por lo que la matriz asociada a f en esta base es: $J=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. La matriz de cambio de base es $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\2&1&0\end{pmatrix}$, cumpliéndose $J=P^{-1}\cdot A\cdot P \Leftrightarrow P\cdot J=A\cdot P$.

2. Dado el sistema:

$$\begin{aligned}10x_1-\quad x_2\qquad\quad &=9\\ -x_1+10x_2-2x_3&=7\\ -2x_2+10x_3&=5\end{aligned}$$

a) Considerando los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel, ¿Cuál recomendarías en función de sus cualidades de convergencia y velocidad de convergencia para resolverlo y por qué?. (0.5 puntos)

b) Utilizando el método iterativo más adecuado, realizar dos iteraciones partiendo del $x^{(0)}=(0\,0\,0)^t$ como vector de aproximación inicial y calcular el error cometido (%). Operar con 4 dígitos significativos. **(1 punto)**

<u>**Solución:**</u>

a) La matriz A del sistema es $A=\begin{pmatrix}10&-1&0\\-1&10&-2\\0&-2&10\end{pmatrix}$ y es estrictamente diagonal dominante, ya que $|10|>|-1|+|0|=1$; $|10|>|-1|+|2|=3$; $|10|>|-2|+|0|=2$; por tanto, tanto el método iterativo de Jacobi como el de Gauss-Seidel convergen. Además la matriz A cumple las condiciones del teorema de Stein-Rosenberg, ya que los elementos de A verifican $a_{ij}\le 0\,\forall i\ne j$ y $a_{ii}>0\,\forall i$, entonces, al ser los dos métodos convergentes, la alternativa que se va a cumplir es $0<\rho(T_G)<\rho(T_J)<1$, siendo $\rho(T_G)$ y $\rho(T_J)$ los radios espectrales de las matrices T asociadas a los métodos de Gauss-Seidel y de Jacobi, respectivamente. Es decir, va a converger más rápido el método de Gauss-Seidel.

b) Se trata, según acabamos de comentar de resolver el sistema por el método de Gauss-Seidel, cuyo algoritmo es:

$$\begin{cases} x_1^{k+1)} = \dfrac{1}{10}(9 \qquad\qquad + \; x_2^{k)} \qquad\quad) \\ x_2^{k+1)} = \dfrac{1}{10}(7 \;\; + x_1^{k+1)} \qquad\qquad + 2x_3^{k)}) \\ x_3^{k+1)} = \dfrac{1}{10}(5 \qquad\qquad + 2x_2^{k+1)} \qquad\quad) \end{cases} \quad \text{para } k=0,1,2,\ldots$$

Partiendo del vector $x^{(0)} = (0\ 0\ 0)^t$ hacemos dos iteraciones:

<u>k = 0</u>

$$x_1^{1)} = \frac{1}{10} \cdot 9 = 0.9; \quad x_2^{1)} = \frac{1}{10} \cdot (7 + 0.9) = 0.79; \quad x_3^{1)} = \frac{1}{10} \cdot (5 + 2 \cdot 0.79) = 0.658$$

$$\rightarrow \text{Primera aproximación a la solución}: \mathbf{x}^{1)} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.79 \\ 0.658 \end{pmatrix}.$$

<u>k = 1</u>

$$x_1^{2)} = \frac{1}{10} \cdot (9 + 0.79) = 0.979; \quad x_2^{2)} = \frac{1}{10} \cdot (7 + 0.979 + 2 \cdot 0.658) = 0.9295;$$

$$x_3^{2)} = \frac{1}{10} \cdot (5 + 2 \cdot 0.9295) = 0.6859 \rightarrow \textbf{Segunda aproximación a la solución}: \mathbf{x}^{2)} = \begin{pmatrix} 0.979 \\ 0.9295 \\ 0.6859 \end{pmatrix}$$

El porcentaje de error:

$$e_{rel}\, x100 = \frac{\max\{|0.979 - 0.9|,|0.9295 - 0.79|,|0.6859 - 0.658|\}}{\max\{|0.979|,|0.9295|,|0.6859|\}} x100 = \frac{0.1395}{0.979} x100 = 14.25\%$$

<u>EJERCICIO 3</u>

1. a) Muestre todos los pasos intermedios, esto es, los multiplicadores, los factores de escala y el vector de pivotaje al aplicar el método de Gauss con cambio de escala y pivotaje parcial en la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 10 & 0 & 20 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

b) Use la información del apartado anterior para encontrar las matrices P, L y U correspondientes al método e identificar la igualdad que se crea a partir de ellas.

(0.75 puntos)

c) Utilizando los datos anteriores, calcular el determinante de A. (0.25 puntos)

d) Utilizando los datos obtenidos, resolver el sistema: $A \cdot \underset{\sim}{x} = (-13\ \ 20\ \ 10)^t$

(0.75puntos)

<u>Solución:</u>

a) Se trata de transformar la matriz A en una triangular superior empleando el método de pivotaje parcial y cambio de escala. Para ello, se comienzan calculando los factores de escala, esto es:

$$s_1 = \max_{1\le j\le n} |a_{1,j}| = \max\{|1|,|-5|,|1|\} = 5;\ s_2 = \max_{1\le j\le n} |a_{2,j}| = \max\{|10|,|0|,|20|\} = 20;$$

$$s_3 = \max_{1\le j\le n} |a_{3,j}| = \max\{|5|,|0|,|-1|\} = 5$$

Inicializamos el vector de pivotaje con valores $\underset{\sim}{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y vamos realizando las siguientes etapas:

<u>k=1:</u> Buscamos el elemento de máximo valor absoluto en la columna 1 como si la matriz se hubiera escalado, es decir, buscamos

$$\max_{i\ge 1} \frac{|a_{i,1}|}{s_i} = \max\left\{\frac{|a_{1,1}|}{s_1}, \frac{|a_{2,1}|}{s_2}, \frac{|a_{3,1}|}{s_3}\right\} = \max\left\{\frac{|1|}{5}, \frac{|10|}{20}, \frac{|5|}{5}\right\} = 1 = \frac{|a_{3,1}|}{s_3}$$

Luego, el pivote será el elemento $a_{3,1}=5$ y deberíamos intercambiar las filas 1 y 3 entre sí. En lugar de eso, intercambiamos los valores 1 y 3 en $\underset{\sim}{p}$, obteniendo que el nuevo vector de pivotaje es $\underset{\sim}{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \underset{\text{Orden de filas}}{\equiv} \begin{pmatrix} F3 \\ F2 \\ F1 \end{pmatrix}$. Las transformaciones a realizar en este paso serán:

$$\boxed{k=1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 10 & 0 & 20 \\ \boxed{5} & 0 & -1 \end{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} m_{11} = 1/5;\ F1-(1/5)F3 \\ m_{21} = 10/5 = 2;\ F2-2F3 \\ \ \end{matrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 0 & -5 & 6/5 \\ 0 & 0 & 22 \\ \boxed{5} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>k=2:</u> Buscamos el elemento de máximo valor absoluto en la columna 2 como si la matriz se hubiera escalado al inicio. Además, buscaremos este pivote de entre las filas 2 y 1, puesto que de la fila 3 ya hemos extraído el pivote en el paso anterior. Esto significa que buscamos

$$\max_{i\ge 2} \frac{|a_{p_i,2}|}{s_{p_i}} = \max\left\{\frac{|a_{2,2}|}{s_2}, \frac{|a_{1,2}|}{s_1}\right\} = \max\left\{\frac{|0|}{20}, \frac{|-5|}{5}\right\} = 1 = \frac{|a_{1,2}|}{s_1} = \frac{|a_{p_3,2}|}{s_{p_3}}$$

El pivote será el elemento $a_{p_3,2} = a_{1,2} = -5$. Por tanto, deberíamos intercambiar las filas $p_2 = 2$ y $p_3 = 1$ entre sí. Pero en lugar de hacer esto, intercambiamos los valores en $\underset{\sim}{p}$, obteniendo que el nuevo vector de pivotaje es $\underset{\sim}{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \underset{\text{Orden de filas}}{\equiv} \begin{pmatrix} F3 \\ F1 \\ F2 \end{pmatrix}$. La matriz obtenida ya es triangular superior reordenándola según este vector, por lo que no hay que hacer transformaciones en este paso ya que el multiplicador es 0:

$$\boxed{k=2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{-5} & 6/5 \\ 0 & 0 & 22 \\ \boxed{5} & 0 & -1 \end{pmatrix} \langle m_{22} = 0 \rangle \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-5} & 6/5 \\ 0 & 0 & 22 \\ \boxed{5} & 0 & -1 \end{pmatrix} = U^*$$

Reordenando esta matriz según los valores obtenidos en el último vector de pivotaje, tenemos que la matriz triangular superior que define el algoritmo es: $U = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 6/5 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}$.

b) Como consecuencia del algoritmo de eliminación gaussiana la matriz A^* reordenada según el último vector de pivotaje $\underset{\sim}{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, es decir, $A^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 10 & 0 & 20 \end{pmatrix}$ se factoriza como producto $A^* = L \cdot U$ siendo la matriz triangular superior U que acabamos de obtener y L la matriz triangular inferior:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{p2,1} & 1 & 0 \\ m_{p3,1} & m_{p3,2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{1,1} & 1 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ es decir:}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 10 & 0 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 6/5 \\ 0 & 0 & 22 \end{pmatrix}.$$ Pero $A^* = P^t \cdot A$, siendo P^t la matriz elemental asociada a los intercambios de filas (F3, F1, F2) correspondientes al último vector de pivotaje, esto es, obtenida a partir de la matriz identidad, haciéndole

tales intercambios de filas: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} < \begin{vmatrix}F3\\F1\\F2\end{vmatrix} > \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} = P^t$. Pero esta matriz es la matriz traspuesta de $P = \left(\mathbf{e}_{\mathbf{p1}} \quad \mathbf{e}_{\mathbf{p}_2} \quad \mathbf{e}_{\mathbf{p}_3}\right) = \left(\mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2\right) = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. Es decir, la factorización obtenida es :

$$P^t \cdot A = L \cdot U \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix}1&-5&1\\10&0&20\\5&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\1/5&1&0\\2&0&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}5&0&-1\\0&-5&6/5\\0&0&22\end{pmatrix}.$$

c) Tomando determinantes en la igualdad anterior:

$$\left|P^t \cdot A\right| = \left|L \cdot U\right| \Leftrightarrow (-1)^{n^{\circ}\text{invers.}} \cdot |A| = |L| \cdot |U| \Leftrightarrow (-1)^2 \cdot |A| = 1 \cdot 5 \cdot (-5) \cdot 22 \Rightarrow |A| = -550.$$

d) Para resolver el sistema $A \cdot \underset{\sim}{x} = (-13 \;\; 20 \;\;\; 10)^t$, utilizamos la factorización de la matriz que acabamos de obtener: $P^t \cdot A = L \cdot U$, entonces, multiplicando por P^t en el sistema queda $P^t \cdot A \cdot \underset{\sim}{x} = P^t \cdot \begin{pmatrix}-13\\20\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-13\\20\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-13\\20\end{pmatrix} \Leftrightarrow L \cdot U \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{c}$, por lo que se trata de resolver los dos sistema triangulares siguientes:

$$U \cdot \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y},\;\; L \cdot \underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{c} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&0&0\\1/5&1&0\\2&0&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-13\\20\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{por sust. progres.}} \begin{cases} y_1 = 10 \\ 1/5 \cdot y_1 + y_2 = -13 \rightarrow y_2 = -15 \\ 2y_1 \quad + \quad y_3 = 20 \rightarrow y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}5&0&-1\\0&-5&6/5\\0&0&22\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-15\\0\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{por susti. regres.}} \begin{cases} 5x_1 \;\; - x_3 = 10 \;\; \rightarrow \;\; x_1 = 2 \\ -5x_2 + 6/5 \cdot x_3 = -15 \rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow \text{Solución} \equiv \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

2. Considérense los datos de la tabla siguiente:

Planeta	a Distancia media desde el sol (en Unidades Astronómicas)	D Periodo de Revolución (en Años Tierra)
Mercurio	**0.39**	**0.24**
Tierra	**1**	**1**
Jupiter	**5.20**	**11.8**
Urano	**19.2**	**84.0**
Plutón	**39.5**	**248**

Ajustar una función potencial de la forma $D = k \cdot a^b$ a estos datos utilizando la técnica de mínimos cuadrados. Plantear el error mínimo-cuadrático cometido en la aproximación. Operar con redondeo a 3 dígitos significativos. (2 puntos)

Solución:

Como nos piden buscar una curva de la forma:

$D = k \cdot a^b \xrightarrow[\text{Tomando log. neperianos}]{} \mathrm{Log}(D) = \mathrm{Log}(k) + b \cdot \mathrm{Log}(a)$. Por tanto, llamando $\mathrm{Log}(k) = B$ y $b = x$ se tiene ya una relación lineal:

$z = B + A \cdot x$ siendo $A = \mathrm{Log}(a),\ z = \mathrm{Log}(D)$. Por tanto, se trata de hallar la recta que mejor se ajusta a los datos $(\mathrm{Log}(a_i),\ \mathrm{Log}(D_i))$:

A_i=Log(a_i)	-0.949	0	1.65	2.95	3.68
z_i=Log(D_i)	-1.42	0	2.48	4.43	5.51

Se trataría de resolver el sistema sobredimensionado:

$$\left.\begin{array}{r} -1.42 = B - 0.949 \cdot x \\ 0 = B + 0 \cdot x \\ 2.48 = B + 1.65 \cdot x \\ 4.43 = B + 2.95 \cdot x \\ 5.51 = B + 3.68 \cdot x \end{array}\right\}$$

que no tiene solución, por lo que se resuelve en el sentido de los mínimos cuadrados.

Se considera:

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -1.42 \\ 0 \\ 2.48 \\ 4.43 \\ 5.51 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \text{ y el subespacio } H = \mathrm{Span}\{\mathbf{x_0},\ \mathbf{x_1}\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -0.949 \\ 0 \\ 1.65 \\ 2.95 \\ 3.68 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se trata de hallar el elemento $\mathbf{u} = B \cdot \mathbf{x_0} + x \cdot \mathbf{x_1}$ mejor aproximación de $\mathbf{z}$ en H respecto al producto escalar $< f, g > = \sum_{i=1}^{4} f(x_i) \cdot g(x_i)$, que como sabemos se obtiene imponiendo que $\mathbf{z} - \mathbf{u} \in H^{\perp} \Leftrightarrow$ hay que resolver el sistema de ecuaciones normales:

$$\begin{pmatrix} < \mathbf{x_0}, \mathbf{x_0} > & < \mathbf{x_0}, \mathbf{x}_1 > \\ < \mathbf{x_0}, \mathbf{x}_1 > & < \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 > \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} < \mathbf{z}, \mathbf{x_0} > \\ < \mathbf{z}, \mathbf{x}_1 > \end{pmatrix}$$

Calculando los productos escalares:

$$< \mathbf{x_0}, \mathbf{x_0} >= 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 5, \ < \mathbf{x_0}, \mathbf{x}_1 >= -0.949 + 0 + 1.65 + 2.95 + 3.68 = 7.33,$$
$$< \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 >= (-0.949)^2 + 0^2 + 1.65^2 + 2.95^2 + 3.68^2 = 25.9$$
$$< \mathbf{z}, \mathbf{x_0} >= -1.42 + 0 + 2.48 + 4.43 + 5.51 = 11.0,$$
$$< \mathbf{z}, \mathbf{x}_1 >= (-1.42)\cdot(-0.949) + 0 + 2.48 \cdot 1.65 + 4.43 \cdot 2.95 + 5.51 \cdot 3.68 = 38.8$$

El sistema a resolver es:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7.33 \\ 7.33 & 25.9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11.0 \\ 38.8 \end{pmatrix}$$ cuya solución es:

$x = 1.5,\ B = 0.001 \rightarrow z = 0.001 + 1.5 \cdot A \xrightarrow[\text{deshaciendo el cambio}]{}$
$\mathrm{Log}(D) = 0.001 + 1.5 \cdot \mathrm{Log}(a) \xrightarrow[\text{tomando exponenciales}]{} \mathbf{D = e^{0.001} \cdot a^{1.5} = 1.00 \cdot a^{1.5}}$. Ésta es la relación obtenida.

El **error mínimo cuadrático** cometido es:

$$e_{\min.cuad.} = \| \underset{\sim}{z}_i - z(\underset{\sim}{A}_i) \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{5} \left[\mathrm{Log}(D_i) - (0.001 + 1.5 \cdot \mathrm{Log}(a_i)) \right]^2}$$ siendo los $\mathrm{Log}(D_i)$ y los $\mathrm{Log}(a_i)$ los que aparecen en la segunda tabla.