eman ta zabal zazu

euskal herriko unibertsitatea universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN AZTERKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

2012–2013 ikasturtea. Bigarren deialdia

1. ORRIA

Izan bitez hurrengo $A, P \in \mathbb{M}_{3\times 3}$ matrize errealak:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[A] Lortu $\det\left(P^{-n}\right)$ (**2 puntu**)

$$\det(P) = |P| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-[-1]) = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{ P alderantzikagarria da.}$$

Orduan:

$$\det\left(P^{-n}\right) = \left|P^{-1}\overset{n}{\dots}P^{-1}\right| = \left|P^{-1}\right|\overset{n}{\dots}\left|P^{-1}\right| = \left[\left(|P|\right)^{-1}\right]^{n} = (-1)^{n} = \begin{cases} 1 & n \text{ bikoitia bada} \\ -1 & n \text{ bakoitia bada} \end{cases}$$

[B] Gauss–Jordan algoritmoa erabiliz, lortu P^{-1}. (**3 puntu**)

$$\left(P \,\middle|\, \mathbb{I}_3\right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{E_2 \leftrightarrow E_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{E_i \leftrightarrow i - E_i \,.\, i=1,2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{E_3 \leftrightarrow E_3 - E_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{E_3 \leftrightarrow E_3 - E_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{E_1 \leftrightarrow E_1 + E_3}{\sim} \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & 1 \\ \mathbb{I}_3 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Erabilgarria da frogaketa hau egitea: $P \cdot P^{-1} = \mathbb{I}_3$.

eman ta zabal zazu

euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN AZTERKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

[C] Definitu zuzenki matrizeen antzekotasuna, eta emandako definiziotik abiatuz ondorioztatu bi matrize antzekoen determinanteen arteko erlazioa. Posible bada, lortu A matrizearen antzekoa den C matrize bat. Arrazoitu erantzuna.

(**3 puntu**)

Bi matrize $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ antzekoak dira baldin existitzen bada P matrize alderantzikagarri bat non $B = P^{-1}AP$. Orduan, hurrengoa ondorioztatzen da:

(1) Determinanteak berdinak dira:

$$|B| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = |P|^{-1}|A||P| = |A|$$

(2) Polinomio karakteristikoak berdinak dira eta, horregatik, balio propioak berdinak dira.

$$p_B(\lambda) = |B-\lambda\mathbb{I}_n| = |P^{-1}AP-\lambda\mathbb{I}_n| = |P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A-\lambda\mathbb{I}_n)P| =$$
$$|P^{-1}||A-\lambda\mathbb{I}_n||P| = |P|^{-1}|A-\lambda\mathbb{I}_n||P| = |A-\lambda\mathbb{I}_n| = p_A(\lambda)$$

Definizioa aplikatuz:

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&2\\-1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

[D] Baldin $\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, $\vec{v}_B$ eta $\vec{v}_{B_1}$ bektoreek $\vec{v}$ bektorearen koordenatuak B eta B_1 oinarrietan (hurrenez hurren) adierazten badituzte, lortu $\vec{v}_B$, jakinda P matrizea B-tik B_1-rako koordenatu-aldaketaren matrizea dela eta $\vec{v}_{B_1} = (-1,1,1)$

(**2 puntu**)

$$P\cdot\vec{v}_B = \vec{v}_{B_1}\ \forall\vec{v}_B\in\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \vec{v}_B = P^{-1}\vec{v}_{B_1} : \begin{pmatrix}1&0&1\\-1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_B = (0,1,1)$$

eman ta zabal zazu

euskal herriko unibertsitatea — universidad del país vasco

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN AZTERKETA
EBAZPENA

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

2. ORRIA

Izan bitez hurrengo bektoreak:

$$p_1(x) = x^3 + x^2,\ \ p_2(x) = x^3 + x^2 + 1,\ \ p_3(x) = x^2 + x,\ \ p_4(x) = x^3 - x + 1 \in \mathbb{P}_3(x)$$

Eta izan bedi: $W = \{ p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \,/\, a = d = b - c \} \subset \mathbb{P}_3(x)$

[A] Egiaztatu W $\mathbb{P}_3(x)$-ren azpiespazio bektoriala dela eta lortu W-ren dimentsioa eta oinarri bat (B_w). Zeintzuk dira $p_4(x) \in \mathbb{P}_3(x)$ –ren koordenatuak B_W oinarrian?(**4 puntu**)

$$\forall p(x) \in W : p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = ax^3 + (a+c)x^2 + cx + a$$
$$= a(x^3 + x^2 + 1) + c(x^2 + x),\ \forall a, c \in \mathbb{R}$$

Orduan:

$$W \triangleq \mathcal{L}(B_W) \,/\, B_W = \{ q_1(x) = x^3 + x^2 + 1,\ q_2(x) = x^2 + x \}$$

Hau da, W $\mathbb{P}_3(x)$-ren azpiespazioa da klausura lineala delako. B_w W-ren sistema sortzailea da eta gainera, sistema librea da:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \end{array} \\ M = & \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} q_1(x) \\ q_2(x) \end{array} \end{array}$$

Horregatik dim(W) = 2, eta B_W W-ren oinarria da.

$p_4(x)$-ren koordenatuak B_w oinarrian:

$$p_4(x) = x^3 - x + 1 = \alpha q_1(x) + \beta q_2(x)$$
$$\Rightarrow \alpha = 1 \wedge \beta = -1 \Rightarrow p_4(x) = x^3 - x + 1 = q_1(x) - q_2(x),$$

[B] Lortu B_N oinarri ortonormal bat B_W oinarritik (**3 puntu**)

Biderkadura eskalar ohikoarekin landuko dugu:

$$\left\langle \vec{p}(x), \vec{q}(x)\right\rangle = \left\langle ax^3+bx^2+cx+d,\, a'x^3+b'x^2+c'x+d'\right\rangle = aa'+bb'+cc'+dd' \,/$$
$$\vec{p}(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ \vec{q}(x)=a'x^3+b'x^2+c'x+d' \in \mathbb{P}_3, \text{ con } a,a',b,b',c,c',d,d' \in \mathbb{R}$$

B_W ez da ortogonala:

$$\left\langle q_1(x), q_2(x)\right\rangle = \left\langle x^3+x^2+1,\ x^2+x\right\rangle = 1 \neq 0 \Leftrightarrow q_1(x) \not\perp q_2(x)$$

Orduan, Gram-Schmidt-en metodoa erabiliko dugu oinarri ortogonal bat lortzeko:

$$\begin{cases} v_1(x) = p_3(x) = x^2+x; \qquad \left\|v_1(x)\right\|^2 = \left\langle x^2+x,\ x^2+x\right\rangle = 2 \\ v_2(x) = p_2(x) - \dfrac{\left\langle p_2(x), v_1(x)\right\rangle}{\left\|v_1(x)\right\|^2} v_1(x) = p_2(x) - \dfrac{1}{2}v_1(x) = x^3+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+1; \quad \left\|v_2(x)\right\|^2 = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Oinarri ortogonala: $B_O = \left\{ v_1(x)=x^2+x,\ v_2(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1 \right\} \subset W$.

B_O normalizatuz, oinarri ortonormala (B_N) lortuko dugu:

$$B_N = \left\{ w_1(x) = \frac{v_1(x)}{\left\|v_i(x)\right\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x^2+x\right),\ w_2(x) = \frac{v_2(x)}{\left\|v_2(x)\right\|} = \sqrt{\frac{2}{5}}\left(x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1\right) \right\}$$

[C] Lortu $p_1\left(x\right)$ bektorearen hurbilketarik onena W-n. (**3 puntu**)

$p_1(x) = x^3+x^2 \notin W$ ekuazioak betetzen ez dituelako:

$$\begin{cases} a = \boxed{1=\alpha} \\ b = 1 = \alpha+\beta \\ c = 0 = \beta \\ d = \boxed{0=\alpha} \end{cases}$$

Orduan hurbilketarik onena bilatuko dugu:

$$v(x) = proy_W \ p_1(x) = proy_{B_W} \ p_1(x) = proy_{B_O} \ p_1(x) = proy_{B_N} \ p_1(x)$$

$$v(x) = proy_{B_O} \ p_1(x) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle p_1(x), v_i(x) \rangle}{\|v_i(x)\|^2} v_i(x) = \frac{\langle p_1(x), v_1(x) \rangle}{\|v_1(x)\|^2} v_1(x) + \frac{\langle p_1(x), v_2(x) \rangle}{\|v_2(x)\|^2} v_2(x) =$$

$$= \frac{\langle p_1(x), v_1(x) \rangle}{\|v_1(x)\|^2} v_1(x) + \frac{\langle p_1(x), v_2(x) \rangle}{\|v_2(x)\|^2} v_2(x) = \frac{1}{2} v_1(x) + \frac{3/2}{5/2} v_2(x) = \frac{1}{2} v_1(x) + \frac{3}{5} v_2(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$

Beraz, $p_1(x)$ bektorearen hurbilketarik onena W-n ondorengoa da: $v(x) = \frac{3}{5}x^3 + \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$.

B_N erabiltzen bada, emaitza ez da aldatzen (oinarri ortonormala ortogonala ere badelako):

$$v(x) = proy_{B_N} \ p_1(x) = \sum_{i=1}^{2} \langle p_1(x), w_i(x) \rangle w_i(x) = \langle p_1(x), w_1(x) \rangle w_1(x) + \langle p_1(x), w_2(x) \rangle w_2(x) =$$

$$= \langle p_1(x), w_1(x) \rangle w_1(x) + \langle p_1(x), w_2(x) \rangle w_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x^2 + x \right) + \frac{3}{\sqrt{10}} \sqrt{\frac{2}{5}} \left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \right) =$$

$$= \frac{3}{5}x^3 + \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{3}{5}$$

Egindako errorea: $\varepsilon(x) = p_1(x) - v(x) = \frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$,

$$\|\varepsilon(x)\|^2 = \|p_1(x) - v(x)\|^2 = \langle p_1(x) - v(x), \ p_1(x) - v(x) \rangle = \frac{3}{5} \, unitate^2$$

eman ta zabal zazu
euskal herriko unibertsitatea
universidad del país vasco

INDUSTRIA INGENIARITZA TEKNIKOKO UNIBERTSITATE ESKOLA
ESCUELA UNIVERSITARIA DE INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL
BILBAO

3. ORRIA

Izan bitez honako ekuazio linealezko sistema hauek:

$$S \equiv \begin{cases} x+z=\alpha \\ x+y+4z=\beta \\ y+3z=0 \\ x+z=0 \end{cases}; \quad T \equiv \begin{cases} x-y=1 \\ y=0 \\ x+y=-1 \end{cases}$$

[A] Idatzi S sistema bere adierazpen bektorialean (**puntu 1**):

$$\vec{a}_1'x+\vec{a}_2'y+\vec{a}_3'z=\vec{b}$$

non $\vec{a}_1'=(1,1,0,1)$, $\vec{a}_2'=(0,1,1,0)$, $\vec{a}_3'=(1,4,3,1)$, $\vec{b}=(\alpha,\beta,0,0)$.

[B] Aztertu S sistemaren bateragarritasuna α , $\beta\in\mathbb{R}$ parametroen arabera (**4 puntu**)

Sistemaren matrize zabaldua: $AM=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 4 & \beta \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

AM-ren determinantea:

$$|AM|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 4 & \beta \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \underset{E_2\leftarrow E_2-E_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Hau da, $h(AM)\neq 4$. Beste aldetik, $h(A)=2$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$ delako, eta

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \boxed{1} & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix}=0;\ |A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix}=0.$$

Gainera, $|A_3|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \boxed{\beta} \end{vmatrix}=-\beta$ eta $|A_4|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \boxed{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-\alpha$.

Beraz, honako kasu hauek lortzen dira:

1. Kasua: $\forall \alpha \neq \beta \Rightarrow r(AM)=3 \neq r(A)=2 \Rightarrow$ **SISTEMA BATERAEZINA**

2. Kasua: $\forall \alpha = \beta \neq 0 \Rightarrow r(AM)=3 \neq r(A)=2 \Rightarrow$ **SISTEMA BATERAEZINA**

3. Kasua: $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow r(AM)=r(A)=2<n=3 \Rightarrow$ **SISTEMA BATERAGARRI INDETERMINATUA**

[C] *S* sistema ebatzi bateragarria den kasuetan. (**2 puntu**)

3. Kasuan:

$$\begin{cases} x+z=0 \\ x+y+4z=0 \\ y+3z=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=-3z \end{cases} \forall z \in \mathbb{R}$$

Beste era batean (Gauss metodoa erabiliz):

$$AM = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ \boxed{1} & 1 & 4 & \beta \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_i \leftarrow E_i - E_1,\, i=2,4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & \beta-\alpha \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{array}\right) \underset{E_3 \leftarrow E_3 - E_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & \beta-\alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-\beta \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{array}\right)$$

[C] Egiaztatu *T* sistema bateraezina dela eta kalkulatu sistemaren soluzio hurbildua karratu txikien bidezko metodoa erabiliz. (**3 puntu**)

T sistemaren matrize zabaldua: $AM = (A|\ b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$

AM-ren determinantea: $|AM| = -2 \neq 0 \Rightarrow h(AM)=3$.

Eta $h(A)=2$, $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ delako. Orduan *T* bateraezina da $h(AM)=3 \neq h(A)=2$ delako.

T sistemaren soluzio hurbildua kalkulatzeko, kontuan hartuko dugu azpiespazio hau:

$$W = \mathcal{L}(F) \,/\, F = \{\vec{a}_1' = (1,0,1),\, \vec{a}_2' = (-1,1,1)\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ eta } \vec{b} = (1,0,-1) \in \mathbb{R}^3.$$

ÁLGEBRA
ALJEBRA

AZKEN AZTERKETA

EBAZPENA

F sistema ortogonal bat da $\langle \vec{a}_1', \vec{a}_2' \rangle = 0$ delako. Orain proiektatzen dugu $\vec{b} = (1,0,-1) \in \mathbb{R}^3$ $W = \mathcal{L}(F)$ azpiespazioan:

$$\vec{b}_p = proy_W\, \vec{b} = proy_{\mathcal{L}(F)}\, \vec{b} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle \vec{b}, \vec{a}_i' \rangle}{\|\vec{a}_i'\|^2} \vec{a}_i' = + \frac{-2}{3} \vec{a}_2' = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$\langle \vec{b}, \vec{a}_1' \rangle = \langle (1,0,1), (1,0,-1) \rangle = 0$$

$$\langle \vec{b}, \vec{a}_2' \rangle = \langle (-1,1,1), (1,0,-1) \rangle = -2$$

Orain ordezkatzen dugu $\vec{b}_p$ T sisteman eta Gauss-Jordan-en metodoa erabiltzen da sistema ebazteko:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 1 & 1 & \frac{-2}{3} \end{array} \right) \underset{\substack{E_1 \leftarrow E_1 + E_2 \\ E_3 \leftarrow E_3 - E_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

Beste era batean (era matrizialean):

$$x_{aprox} = \left(A^T A \right)^{-1} \left(A^T b \right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

Egindako errorea:

$$\|\vec{\varepsilon}\| = \|\vec{b} - \vec{b}_p\| = \left\| \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0.8165\, unitate$$

AZKEN AZTERKETA
EBAZPENA

4. ORRIA

Izan bedi $M \in \mathbb{M}_{3\times 3}$ matrize erreala:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[A] Aztertu $a \in \mathbb{R}$ parametroaren zein baliotarako M matrizea diagonalizagarria den.

(**3 puntu**)

Polinomio karakteristikoa kalkulatzen da:

$$p_A(\lambda) = \left|A - \lambda \mathbb{I}_3\right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & a \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ -1 & 1-\lambda & \lambda-2 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ -1 & 1-\lambda & \boxed{1} \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \underset{F_2 \leftarrow F_2 + F_3}{=}$$

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1-\lambda & a & 0 \\ 0 & \boxed{1-\lambda} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(1-\lambda)^2, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Azpiespazio propioak kalkulatzen dira:

$\boxed{V(1)}$ $\left(M - \mathbb{I}_3\right) X = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Hemen kasu desberdinak daude:

1. Kasuan: $\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ay + az = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -z = x \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V(1) \ni \vec{x} = (x, y, z) = (x, x, -x) = x(1,1,-1) \Leftrightarrow V(1) = \mathcal{L}\left(\left\{\vec{u}_1 = (1,1,-1)\right\}\right)$$

2. Kasuan: $a = 0$

$$x = -z \Leftrightarrow V(1) \ni \vec{x} = (x, y, z) = (x, y, -x) = x(1,0,-1) + y(0,1,0) \Leftrightarrow V(1) = \mathcal{L}\left(\left\{\vec{u}_1 = (1,0,-1), \vec{u}_2 = (0,1,0)\right\}\right)$$

eta $h(F) = 2$ non F=$\left\{\vec{u}_1 = (1,0,-1), \vec{u}_2 = (0,1,0)\right\}$.

$\boxed{V(2)}$ $(M-2\mathbb{I}_3)X=\begin{pmatrix}-1 & a & a\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}ay+az=0\\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-y\\ x=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V(2)\ni\vec{x}=(x,y,z)=(0,y,-y)=y(0,1,-1)\Leftrightarrow V(2)=\mathcal{L}(\{\vec{u}_3=(0,1,-1)\})$ eta $\vec{u}_3\neq\vec{0}_{\mathbb{R}^3}$

Orduan $a=0$ denean

i	λ_i	k_i	$V(\lambda_i)\triangleq\{X\in\mathbb{R}^3/(M-\lambda_i\mathbb{I}_3)X=[0]_{3\times3}\}$	$d_i=\dim[V(\lambda_i)]$
1	1	2	$\mathcal{L}(\{\vec{u}_1=(1,0,-1),\vec{u}_2=(0,1,0)\})$	2
2	2	1	$\mathcal{L}(\{\vec{u}_3=(0,1,-1)\})$	1

Orduan $a=0$ denean matrizea diagonalizagarria da, hau da, hurrengo baldintzak betetzen dira:

$$k_i=d_i,\ i=1,2$$
$$\sum_{i=1}^{2}d_i=3=n$$

[B] Ba al dago $a\in\mathbb{R}$ parametroaren baliorik M matrizea ortogonalki diagonalizagarria egiten duenik? Arrazoitu erantzuna. (**puntu 1**)

M ez da inoiz simetrikoa izango, beraz, ez da inoiz ortogonalki diagonalizagarria izango.

[C] $a=0$ kasuan, lortu M-ren matrize antzekoa den D matrize diagonala eta M-ren bektore propioekin osatutako P matrize bat. (**2 puntu**)

$D=P^{-1}MP$ bete behar da, non D M matrizearen balio propioekin osatutako matrize diagonal bat den. Orduan:

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=P^{-1}M\begin{pmatrix}0&-1&0\\-1&0&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

AZKEN AZTERKETA

EBAZPENA

Eta P matrizea bektore propioak zutabetzat dituen matrizea izango da: $P=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

[D] Lortu M^n, M eta D matrizeen antzekotasun erlazioa erabiliz. (**2 puntu**)

$D=P^{-1}MP \Leftrightarrow M=PDP^{-1}$. Orduan, frogatzen da: $M^n=PD^nP^{-1}$:

$$D^n=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 1^n & 0\\ 0 & 0 & 1^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$M^n=PD^nP^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$\left.\begin{cases}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n & 0 & 2^n\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ =\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -2^n & 0 & 1\\ 2^n & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\end{cases}\right\}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1-2^n & 1 & 1-2^n\\ -1+2^n & 0 & 2^n\end{pmatrix}\Rightarrow A^n=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1-2^n & 1 & 1-2^n\\ -1+2^n & 0 & 2^n\end{pmatrix}$$

[E] *Mathematica* programa erabiliz, B matrize bat sartu da, aurrekoa legez, $a\in\mathbb{R}$ parametroaren menpe dagoena. Aurreko ataletan lortutako emaitzen arabera, eta programaren honako kode honen arabera, egiaztatu, arrazoituz, $M=B$ den ala ez.(**2 puntu**)

In[31]:= **{a=0, Eigensystem[B]}**

Out[31] ={{2,1,1},{{0,-1,1},{-1,-1,1},{0,0,0}}}

Ez, $B\neq M$ M diagonalizagarria delako a= 0 denean eta B ez ($\lambda=1$ balio propioak elkartutako bektore propio bakar bat daukalako: $\vec{u}=(-1,-1,1)$).