MATEMATIKA AURRERATUA. 2017-2018

Bigarren Mintegirako Ariketak – Laplaceren Transformatua

1. ARIKETA

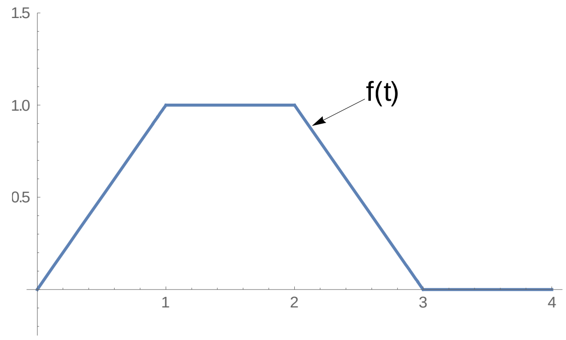
A) $1\ kg$ -ko masa bat $k=9\ m/s$ konstanteko malguki batekin lotuta dago. Hasiera batean, masa hori oreka-puntutik beherako $1\ m$ –ko distantzia kokatuta dagoen atseden-posiziotik askatzen da. $t=\pi/2\ s$ unean goranzko mailukada bat aplikatzen zaio, $3\ N$ -ko indar bat eraginez. Horren arabera, aurreko sistema adierazterako balio duen ekuazio diferentziala honako hau da:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+9y=-3\delta\left(t-\pi/2\right)\ ,\ \ y(0)=1 \text{ eta } y'(0)=0 \text{ izanik.}$$

i) Lortu masaren posizioa denboraren arabera. Hau da, lortu y(t) funtzioa.

ii) Lortu masaren posizioa $t=\pi/4\ s$ eta $t=\pi\ s$ uneetan.

B) Ondoko grafikoan erakusten den $f(t)$ funtzioa emanda:



Lortu $\mathcal{L}\left[f(t)\right]$, erabilitako Laplaceren transformatuaren propietateak enuntziatuz.

C) Kalkulatu $I=\int_0^{\infty} t^4\cdot(e^{-t/2}-e^{-2t})\cdot dt$ integralaren balioa, Laplaceren transformatua aplikatuz.

2. ARIKETA

A) Izan bitez $a>0$ eta $b\in\mathbb{R}$ parametroak eta izan bedi ondoko funtzioa: $F(s)=\dfrac{1}{e^{as}\cdot(s+b)\cdot s}+\dfrac{b}{(s+a)^2}$. Lortu $\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$, $b\in\mathbb{R}$ parametroaren balioen arabera.

B) Ebatzi honako problema diferentzial hau:

$$\begin{cases} x'(t)=-y(t)+H(t-a) \\ y'(t)=-x(t)+H(t-a) \end{cases}\ ,\quad x(a)=0 \text{ eta } y(0)=0 \text{ izanik.}$$

<u>Oharra</u>: $Ch(x)\neq 0\ \ \forall x$

3. ARIKETA

A) Kalkulatu $\mathrm{L}\left[t\cdot\int_0^t (t-u)\cdot e^{(t-2u)}\cdot \mathrm{Sh}(2u)\cdot du\right]$, pauso bakoitzean erabilitako Laplaceren transformatuaren propietateak enuntziatuz.

B) Izan bitez $F(s)=\mathrm{L}\left[f(t)\right]=\begin{cases}1-s & 0\le s\le 1\\ 0 & \text{gainerako kasuetan}\end{cases}$ eta $y(t)=\int_0^t e^{-x}\cdot f(x)\cdot dx$. Kalkulatu eta adierazi grafikoki $Y(s)=\mathrm{L}\left[y(t)\right]$, erabilitako teoremak eta propietateak enuntziatuz.

4. ARIKETA

A) Enuntzia eta froga ezazu $\mathrm{L}\left[\int_0^t f(x)\cdot dx\right]$ kalkulatzea ahalbidetzen duen Laplaceren transformatuaren propietatea.

B) 1) Definitu *“Sistema baten Transferentzia Funtzioa”* kontzeptua.

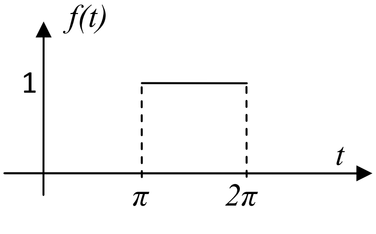
2) Izan bedi sistema baten $Q(s)$ transferentzia funtzioa. Lortu Dirac-en delta funtzioarekiko sistemaren erantzuna eta sistemaren admitantzia (hau da, $H(t)$ unitate-maila funtzioarekiko sistemaren erantzuna), $Q(s)$-ren arabera.

C) Sistema baten admitantzia $a(t)=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}e^{-t}\cdot\left(2\cos(2t)+\sin(2t)\right)$ dela jakinda. Lortu:

1) Sistemaren transferentzia funtzioa.
2) Dirac-en delta funtzioarekiko sistemaren erantzuna.
3) $r(t)=\delta(t-3)$ sarrerarekiko sistemaren erantzuna, sistema hori hasieran geldirik dagoela suposatuz.

5. ARIKETA

A) Ebatzi ondoko problema diferentziala: $y''(t)+y(t)=f(t)+\delta(t-2\pi)$, $y(0)=0$ eta $y'(0)=1$ izanik, eta $f(t)$ horrela izanik:



$y(t)$ jarraitua da? Arrazoitu erantzuna.

Lortu $t=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ eta $\frac{5\pi}{2}$ puntuetarako $y(t)$ -ren balioak.

B) Enuntziatu eta frogatu s eremuko desplazamenduari dagokion Laplaceren transformatuaren propietatea.

C) Kalkulatu $\mathrm{L}\left[\mathrm{Sh}^2(2t)\cdot\sin(t)\right]$.

6. ARIKETA

A) Enuntzia ezazu $\mathcal{L}^{-1}\left[F'(s)\right]$ kalkulatzea ahalbidetzen duen Laplaceren transformatuaren propietatea eta aplikatu propietate hori $\mathcal{L}^{-1}\left[\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+9}\right)\right]$ kalkulatzeko.

B) Ebatzi ekuazio diferentzialezko honako sistema hau, Laplaceren transformatua aplikatuz:

$$\begin{cases} x''(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}, \quad x(0) = 0 \text{ eta } x'(0) = y(0) = 1 \text{ izanik.}$$